

Matthias Grimsel
Mechanisches Verhalten von Holz

Dresdner Forschungen

Maschinenwesen

Bd. 1

Matthias Grimsel

Mechanisches Verhalten von Holz

Struktur- und Parameteridentifikation

eines anisotropen Werkstoffes


w.e.b.
Universitätsverlag

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Grimsel, Matthias:

Mechanisches Verhalten von Holz : Struktur- und
Parameteridentifikation eines anisotropen Werkstoffes / Matthias
Grimsel. - Dresden: w.e.b.-Univ.-Verl., 1999

(Dresdner Forschungen Maschinenwesen ; Bd. 1)

Zugl.: Dresden: Techn. Univ., Diss., 1999

ISBN 3-933592-66-6

© w. e. b.

1999

Universitätsverlag / Buchhandel

Bergstr. 78 • 01069 Dresden

Alle Rechte vorbehalten.

All rights reserved.

Herstellung und Umschlag: w. e. b.

Satz und Redaktion: Matthias Grimsel

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren,
Herausgeber und Verleger für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen
sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Mechanisches Verhalten von Holz

Struktur- und Parameteridentifikation eines anisotropen Werkstoffes

Von der Fakultät Maschinenwesen
der
Technischen Universität Dresden

zur
Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)
angenommene Dissertation

Dipl.-Ing. Matthias Grimsel
geb. am 10. Juli 1963 in Hildesheim

Tag der Einreichung: 17. Juli 1998

Tag der Verteidigung: 7. Mai 1999

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. H.-J. Hardtke, Dresden
Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. R. Fischer, Dresden
Prof. Dr.-Ing. C.-P. Fritzen, Siegen

Prof. Dr.-Ing. habil. H.-G. Marquardt
Vorsitzender der Prüfungskommission

Vorwort

Diese Dissertationsschrift entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörpermechanik der TU Dresden und als Stipendiat des Graduiertenkollegs "Kontinuumsmechanik inelastischer Festkörper".

Ich danke meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H.-J. Hardtke, für die Anregung zu dieser Arbeit und die stete freundliche Unterstützung meiner Tätigkeit. Ihm verdanke ich ein fruchtbares Umfeld mit der notwendigen apparativen Ausstattung in gesicherten Verhältnissen, aber auch mit ausreichenden Freiräumen.

Dem Sprecher des Graduiertenkollegs, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. V. Ulbricht, sowie den daran beteiligten Hochschullehrern und Kollegiaten möchte ich für viele wertvolle Diskussionen und Hinweise, aufbauende Ratschläge sowie eine ausgezeichnete Atmosphäre danken, die nicht nur auf die Arbeit beschränkt war.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. R. Fischer, der sich als Gutachter zur Verfügung gestellt hat, verdanke ich zahlreiche das Holz betreffende und ermunternde Hinweise. Für die Übernahme des Korreferates möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. C.-P. Fritzen bedanken.

Ganz besonders muß ich mich bei meinem Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. D. Ottil bedanken, der während meines Studiums an der TU Braunschweig das Interesse an der Mechanik in mir geweckt hat und ohne den ich wahrscheinlich nie eine wissenschaftliche Laufbahn eingeschlagen hätte.

Allen Mitarbeitern des Institutes für Festkörpermechanik danke ich für ihre Unterstützung und das nicht nur kollegiale, sondern eher schon familiäre Arbeitsklima. Es war und ist mir stets ein Vergnügen dazuzugehören.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie für die Geduld und das Verständnis während der Höhen und Tiefen, insbesondere in der Abschlußphase, meiner Arbeit bedanken.

Außerdem gilt mein Dank Donald E. Knuth, Leslie Lamport, Richard M. Stallman, Linus Torvalds und allen anderen, die ihre Kreativität und Arbeitskraft ohne finanzielle Hintergedanken in die Entwicklung von kostenloser und jedermann zugänglicher Software investieren und dabei Phantastisches geleistet haben. Ohne \LaTeX , GNU, Linux, Scilab und all die anderen kleineren oder größeren Hilfsprogramme wäre meine Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen.

Dresden, im Juli 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stand der Holzforschung	3
3	Identifikationsverfahren	5
4	Anatomie des Holzes	9
4.1	Makrostruktur	9
4.2	Mikrostruktur	10
4.3	Wachstumseinflüsse	12
5	Holz als anisotroper, elastischer Festkörper	13
5.1	Kontinuumsmechanische Grundlagen	13
5.2	Koordinatentransformationen	15
5.3	Sensitivitätsanalyse für Zugversuche	21
5.4	Identifikation von Querdehnzahlen aus Biegeversuchen	25
5.5	Identifikation von Schubmoduln aus Torsionsversuchen	30
5.6	Identifikation von Parametern aus Modalanalysen	36
5.6.1	Theoretische Grundlagen	36
5.6.2	Experimente aus der Literatur	38
5.6.3	Eigenes Experiment	43
6	Rheonomes Verhalten von Holz	51
6.1	Mathematische Beschreibung des linear viskoelastischen Materialverhaltens	51
6.2	Identifikation von viskoelastischen Materialparametern	54
6.2.1	Werkstoffmodell mit drei Parametern	54
6.2.2	Werkstoffmodell mit fünf Parametern	56
6.3	Ein verallgemeinertes Werkstoffmodell	58
6.4	Numerische Simulation des mechanosorptiven Kriechens	60
7	Die Holz Trocknung als Anwendungsbeispiel	62
7.1	Sensitivitätsanalyse und Reduktion auf ebenes Problem	62
7.2	Eindimensionales, phänomenologisches Ersatzmodell	66
7.3	Beispielrechnung auf FE-Basis	68
8	Zusammenfassung und Ausblick	75
	Literatur	77
	Anhang	86

Verwendete Abkürzungen und Formelzeichen

T, L, R	}	Indizes für Tangential-, Längs- und Radialrichtung
t, l, r		
i, j, k, l		Indizes, die von 1 bis 3 laufen
α, β, γ		Winkelgrößen
α_i, β_i		Koeffizienten für thermische Ausdehnung bzw. feuchtebedingtes Quellen
l, b, h		Geometrische Abmessungen, Länge, Breite, Höhe
u, v, w		Verschiebungen in x, y, z -Richtung
$\frac{\partial y}{\partial x}$	}	Partielle Ableitung von y nach x
y, x		
η, ζ		Transformierte, dimensionslose Koordinaten
ρ		Dichte
t		Zeit
T		Temperatur
X		Relative Holzfeuchte
σ		Spannung, Normalspannung
τ_{ij}		Schubspannung
ε		Dehnung, Längsdehnung
γ_{ij}		Schubverzerrung
$\underline{\mathbf{J}}, J_{ijkl}$		Elastizitätsmatrix, Elastizitätstensor
$\underline{\mathbf{C}}, C_{ijkl}$		Steifigkeitsmatrix, Steifigkeitstensor
s_{ij}		Element der Elastizitätsmatrix
c_{ij}		Element der Steifigkeitsmatrix
g_{ai}		Metrikkoeffizienten, Rotationsmatrix
E		Elastizitätsmodul bzw. Federsteifigkeit
G		Schubmodul
D		Verdrillung, Drillungsmodul oder Dämpfungskonstante
K		Plattensteifigkeit
ν		Querdehnzahl
μ_k		Poisson'sche Konstante, Maß für Kompressibilität
ω		Eigenkreisfrequenz
λ		Wellenlänge
ϑ		Verdrehwinkel, Torsionswinkel
φ		Verwölbung
$\underline{\Theta}$		Parametersatz, Parametervektor
$\underline{\Phi}, \Phi$		Sensitivitätsmatrix, Empfindlichkeitsfunktion
Ψ		Spannungsfunktion
∇		Nablaoperator
$\Gamma(t)$		Gedächtnisfunktion
$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{J}$		Koeffizienten für die Berechnung von Eigenfrequenzen

Abbildungsverzeichnis

3.1	Grundprinzip der verwendeten Identifikationsverfahren	8
4.1	Makrostruktur von Holz	9
4.2	Mikrostruktur von Holz	10
4.3	Holz unter dem Mikroskop	11
4.4	Ein "angepaßter" Baum	12
5.1	Transformation mit Euler-Winkeln	16
5.2	Deformationskörper für Zug: Fichte und Buche	18
5.3	Deformationskörper für Torsion: Fichte und Buche	19
5.4	Deformationskörper für Balsa und Mahagoni	20
5.5	Deformationsflächen für Querdehnung: Fichte und Buche	20
5.6	Sensitivitätsanalyse: Aufgabenstellung	21
5.7	Sensitivitätsanalyse: Lösungsansätze	22
5.8	Sensitivitätsanalyse: Resultierende Sensitivitätsfunktion	22
5.9	Mögliche Verformungen einer Holzprobe unter einachsiger Zugbelastung	24
5.10	Vier-Punkt-Biegeversuch an einem Plattenstreifen	25
5.11	Versuchsaufbau für Hologramminterferometrie	26
5.12	Interferogramm für die Messung von ν_{TR} und ν_{RT}	27
5.13	Berechnete Interferogramme: ν_{TR} und ν_{RT}	28
5.14	Berechnete Interferogramme: ν_{RL} und ν_{LR}	28
5.15	Aus der Ablesegenauigkeit $\Delta\alpha$ resultierender Fehler der Querdehnzahl ν	29
5.16	Berechnetes Interferogramm für ν_{RL} , Orientierungsabweichung 5°	29
5.17	Torsion eines prismatischen Stabes	30
5.18	Schubspannungsverteilung: τ_{xy} und τ_{xz}	32
5.19	Zielfunktionsgebirge für die Identifikation von Schubmoduln	33
5.20	ILK-Längen-Drillungs-Extensiomter mit prismatischem Holzprüfkörper	34
5.21	Verdrehwinkel unterschiedlich orientierter Torsionsproben	34
5.22	Verdrillungsmoduln der unterschiedlichen Torsionsprüfkörper	35
5.23	Aus dem Torsionsversuch identifizierte Schubmoduln	35
5.24	Mode-Splitting durch Poisson-Kopplung	38
5.25	Eigenformen einer Fichtenholzplatte bei veränderten Seitenverhältnissen	39
5.26	Sensitivitätsmatrix für acht Eigenfrequenzen	42
5.27	Die ersten acht Eigenformen einer Fichtenholzplatte	42
5.28	Orthotropieachsen der untersuchten Buchenholzplatte	43
5.29	Identifikationsschema	44

5.30	Parametersensitivitäten bei der rechn. Modalanalyse mit 3D-Elementen . . .	45
5.31	Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom Verdrehwinkel α	46
5.32	Umrechnung der ermittelten Materialparameter auf Bauteilparameter . . .	47
5.33	Parametersensitivitäten beim <i>Rayleigh-Ritz</i> 'schen Verfahren	48
5.34	Parametersensitivitäten bei Verwendung von 2D-Schalenelementen	49
6.1	Lineare Viskoelastizität: Relaxation und Retardation	52
6.2	Lineare Viskoelastizität: Phänomenologische Werkstoffmodelle	54
6.3	Viskoelastisches Materialmodell mit drei Parametern	55
6.4	Approximation von Kriechkurven mit drei Parametern	56
6.5	Viskoelastisches Materialmodell mit fünf Parametern	56
6.6	Approximation von Kriechkurven mit fünf Parametern	57
6.7	Approximierte Kriechkurven bei nichtlogarithmischer Zeitachse	57
6.8	Experimenteller Nachweis des mechanosorptiven Kriechens.	59
6.9	Phänomenologisches Werkstoffmodell	60
6.10	Phänomenologie des mechanosorptiven Kriechens	61
7.1	Verformungen eines getrockneten Buchenbrettes.	62
7.2	Maximalwerte der Spannungen und Verschiebungen	63
7.3	Sensitivitätsmatrix für die Holz Trocknung	63
7.4	Komponenten der Sensitivitätsmatrix mit über 20%	64
7.5	Gewichtete Spannungen und Verschiebungen	64
7.6	Erste Reduktion der Sensitivitätsmatrix	65
7.7	Zweite Reduktion der Sensitivitätsmatrix	65
7.8	Dreilagiges, einachsiges Modell für ein zu trocknendes Brett	66
7.9	Trocknungsspannungen in einem dreilagigen, einachsigen Modell	67
7.10	Verwendeter Trocknungsplan.	69
7.11	Berechneter Feuchteverlauf	70
7.12	Berechneter Spannungsverlauf	70
7.13	Hauptspannungen zu Beginn der Trocknung (nach 60h)	71
7.14	Hauptspannungen am Ende der Trocknung (nach 190h)	71
7.15	Verschiebungen zu Beginn der Trocknung (nach 60h)	72
7.16	Verschiebungen am Ende der Trocknung (nach 190h)	72
7.17	Gabelprobe zu Beginn der Trocknung (nach 60h)	73
7.18	Gabelprobe am Ende der Trocknung (nach 190h)	73
7.19	Angenommener Feuchteverlauf für elastische Rechnung	74
7.20	Spannungsverlauf bei rein elastischer Rechnung	74
A.1	Mathematica Beispiel-Notebook	87
A.2	Struktur des Programmablaufes zur Trocknungssimulation	88

Tabellenverzeichnis

1	Ableitung der Dehnung nach den einzelnen Elastizitätszahlen	23
2	Anteile der einzelnen Elastizitätszahlen an der Gesamtdehnung (Fichte) . .	23
3	Absolute Sensitivitäten	24
4	Relative Sensitivitäten	24
5	Isothetenwinkel α für die Bestimmung von Querdehnzahlen	29
6	Koeffizienten für die Berechnung der Eigenfrequenzen	37
7	Empfindlichkeiten und Elastizitätszahlen bei konstant angenommener Dichte	39
8	Dichtegradient und linear dichteabhängige Elastizitätszahlen	40
9	Vergleich der gemessenen und der berechneten Eigenfrequenzen (in Hz) . .	40
10	Identifizierte Materialparameter und verbleibende Frequenzabweichungen .	41
11	Gemessene und berechnete Eigenfrequenzen, 3D-Elemente	46
12	Vergleich der gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen, <i>Rayleigh-Ritz</i> .	48
13	Gemessene und berechnete Eigenfrequenzen, 2D-Schalenelemente	49
14	Zusammenstellung der identifizierten Material- und Bauteilparameter . . .	50
15	Identifizierte viskoelastische Parameter, Drei-Parameter-Modell	56
16	Identifizierte viskoelastische Parameter, Fünf-Parameter-Modell	58
17	Elastizitätszahlen unterschiedlicher Hölzer	89

1 Einleitung

“Any engineer who has not, at least once, reflected on the engineering aspects of biological structures has confirmed Gordon’s dictum [32] that very little is known about all this because *‘nothing attracts less attention than total success’*.” [62]¹

Holz ist nicht nur einer der ältesten Konstruktionswerkstoffe der Menschheit, sondern kann auch als ausgesprochen fortschrittlich bezeichnet werden. Es ist leicht bearbeitbar, hat ein geringes spezifisches Gewicht und ist ein relativ guter thermischer und elektrischer Isolator. Zudem hat es einen besonders geringen Preis pro Volumen.

In der Natur findet man fast ausschließlich leichtbelastete Strukturen. Dazu zählt auch das Holz, das wegen des guten Verhältnisses \sqrt{E}/ρ als ein Vorbild für den modernen Leichtbau (Sandwichbauweise, Faserverstärkte Kunststoffe) angesehen werden kann.

Holz fand und findet in vielen unterschiedlichen Bereichen Anwendung:

- als Konstruktionswerkstoff für Dachbalken, Innenausbau, Fußboden und Möbel,
- als ausgesprochener Leichtbauwerkstoff für Schiffe und Flugzeuge,
- als edles Material mit besonderen akustischen Eigenschaften für Musikinstrumente,
- aber auch als billiges und robustes Verpackungsmaterial.

Ein besonderer und immer wichtiger werdender Vorteil von Holz ist, daß es sich dabei um einen natürlichen und nachwachsenden Rohstoff handelt. Der jährliche Holzverbrauch liegt weltweit in der Größenordnung von 1 Milliarde Tonnen (gegenüber nur etwa 500 Millionen Tonnen Metalle), wobei Brennholz und primitives Baumaterial nicht erfasst sind [33]. Trotzdem steht nicht zu befürchten, daß es in absehbarer Zeit zur Mangelware werden könnte.

Häufig wird das Holz nicht im Naturzustand belassen, sondern mechanisch zerfasert und unter Zusatz von Leim zu Span- oder Faserplatten verpreßt. Auch Papier und Pappe bestehen aus Zellulosefasern, die aus dem Holz herausgelöst werden.

Im Laufe der Zeit hat sich viel intuitives Wissen und handwerkliches Können entwickelt. Es zeigt sich jedoch immer noch ein deutlicher Nachholbedarf auf Seiten der Ingenieure, wenn es darum geht, das mechanische Verhalten von Holz zu verstehen und zu beschreiben.

Zwar gibt es schon seit Anfang dieses Jahrhunderts zahlreiche Untersuchungen zur Beschreibung des elastischen Verhaltens von Holz und Holzwerkstoffen, wobei umfangreiche Tabellen mit Elastizitätszahlen verschiedener Hölzer erstellt wurden. In der Praxis können diese Tabellen aber nur Anhaltswerte liefern, die für viele Anwendungen nicht ausreichen.

¹Jeder Ingenieur, der nicht wenigstens einmal über die Ingenieuraspekte biologischer Strukturen nachgedacht hat, bestätigt Gordon’s These, daß nur sehr wenig darüber bekannt ist, weil ”nichts weniger Aufmerksamkeit erregt als vollständiger Erfolg”.

Häufig ist also eine experimentelle Verifizierung für das tatsächlich verwendete Material notwendig. In der vorliegenden Arbeit werden deshalb Verfahren vorgestellt, die unter Berücksichtigung sowohl der Kontinuumsmechanik als auch der Identifikationstheorie eine optimale Identifikation der benötigten Werkstoffparameter bei möglichst geringem experimentellem Aufwand erlauben.

Die Arbeit beginnt im zweiten Kapitel mit einer kurzen Einschätzung der Entwicklung und des derzeitigen Standes der Holzforschung. Dabei konzentriert sie sich im wesentlichen auf solche Veröffentlichungen, bei denen die mechanische oder physikalische Beschreibung dieses Werkstoffes im Vordergrund steht.

Im dritten Kapitel schließt sich eine Erläuterung der wichtigsten Begriffe und Grundlagen der Identifikationstheorie an. Es werden die notwendigen Einschränkungen oder Ergänzungen für den hier eingeschlagenen Weg der Struktur- und Parameteridentifikation erklärt.

Der Aufbau des Holzes als natürlich gewachsener Rohstoff wird im vierten Kapitel erklärt. Dabei wird sowohl auf die unterschiedlichen Strukturebenen, als auch auf mögliche Wachstumseinflüsse eingegangen.

Im fünften Kapitel wird das Holz als homogener, anisotroper, elastischer Festkörper betrachtet, um sein mechanisches Verhalten zu beschreiben. Die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen werden aufgestellt und die benötigten Materialparameter analysiert. Anschließend werden die unterschiedlichen Verfahren vorgestellt, mit denen eine Identifikation dieser elastischen Parameter möglich ist. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Sensitivitätsanalyse.

Um auch das Langzeitverhalten von Holz sowie den Einfluß von Feuchteänderungen beschreiben zu können, sind einige Erweiterungen des Werkstoffmodells notwendig und werden im sechsten Kapitel vorgenommen. Die Materialparameter für viskoelastisches und mechanosorptives Kriechen werden erläutert und identifiziert.

Als praktisches Beispiel für die Anwendbarkeit des Materialmodells wird im siebten Kapitel der Prozeß der Holztrocknung untersucht. Die dabei auftretenden und aus der Praxis bekannten Phänomene werden vorgestellt und es wird gezeigt, wie sie im Rahmen einer numerischen Simulation wiedergegeben werden können.

Das umfangreiche Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit beinhaltet neben den explizit im Text zitierten Veröffentlichungen auch zusätzliche Quellen, die den Autor beeinflussen haben und vielleicht auch dem Leser weiterhelfen können.

2 Stand der Holzforschung

Die wesentlichen Grundlagen für die Beschreibung des elastischen Verhaltens von Holz wurden zu Beginn dieses Jahrhunderts gelegt. VOIGT [137] lieferte das notwendige Verständnis und die Werkzeuge für die Untersuchung anisotroper Festkörper. Darauf aufbauend befaßten sich vor allem Physiker wie HÖRIG [50, 51, 52, 53] oder HEARMON [44, 45, 46] sowohl theoretisch als auch experimentell mit anisotropem Werkstoffverhalten und wählten dazu Holz als Beispiel. Einen guten Überblick und eine saubere Darstellung in geschlossener Form gibt die ausgezeichnete Arbeit von KEYLWERTH [67].

Vor allem in den 50'er und 60'er Jahren erschienen die umfassenden und zahlreichen Arbeiten von KOLLMANN [71, 72, 73, 74, 75, 76, 77], der sich auf den unterschiedlichsten Teilgebieten sowie auch als Herausgeber der Zeitschrift *Holz als Roh- und Werkstoff* sehr um die Holzforschung verdient gemacht hat.

Nach dem Krieg und bis in die jüngere Zeit wurden die schon von HÖRIG entwickelten und eingesetzten Meßmethoden in Deutschland mit modernerer Technik wiederholt [2, 8, 78, 144, 98], ohne daß jedoch neue theoretische Erkenntnisse hinzugekommen wären. Teilweise sind die Ergebnisse sogar unbrauchbar (wie z.B. in [98]), weil die Forderungen der Elastizitätstheorie wie Symmetrie und Definitheit der Stoffmatrix nicht erfüllt werden. Auch in renomierten Zeitschriften findet man gelegentlich Aufsätze, die, basierend auf fehlerhaften Annahmen, die von VOIGT richtig beschriebenen Grundlagen der Anisotropie anzweifeln (siehe [15]).

Die geltenden deutschen Normen richten sich hauptsächlich an Architekten, Bauherren, Holzhandel und Prüfinstitute [19], sind aber aus der Sicht der Mechanik nur wenig ergiebig. Sie beschäftigen sich mit den Handelsnamen der gebräuchlichsten Holzarten, geben Hinweise zur Qualitätsklassifizierung und beschreiben detailliert Versuchsanordnungen zur Bestimmung einzelner Materialparameter. Leider findet man jedoch nicht einen einzigen vollständigen Satz von Materialparametern, wie er z.B. für eine FEM-Rechnung erforderlich ist.

Neuere theoretische Ansätze zur Identifikation von Materialparametern für Holz, auch mit numerischen Methoden, finden sich in Frankreich bei [115, 27]. Einige interessante, jedoch nicht weiter verfolgte Ansätze stammen auch aus dem Gebiet der Akustik [23, 24].

Ein Randgebiet der Holzforschung, das jedoch zu jeder Zeit das Interesse von Forschern aus unterschiedlichen Fachgebieten erweckt, stellt die Entstehung von Wachstumsspannungen dar [3, 7, 13, 28, 104, 135, 64, 65, 142].

Gegenstand der aktuellen Forschung ist das Kriechverhalten von Holz, insbesondere im Zusammenhang mit Feuchtigkeitsschwankungen. Die Phänomene sind seit den 60'er Jahren bekannt und werden zunächst eher qualitativ beschrieben [5, 74, 47, 34]. Erste Erklärungsversuche und Modellvorstellungen finden sich bei [83, 112, 99]. Erst in jüngerer Zeit werden auch quantitative Untersuchungen vorgenommen, die auch einer Berechnung zugänglich sind [38, 49, 57, 58, 59, 60, 117].

Besonders wichtig ist die Kenntnis des Kriechverhaltens für den Prozeß der Holz Trocknung. Während der Feuchtetransport selbst hinreichend genau beschrieben werden kann [97, 122, 136], gibt es für die Vorhersage der daraus resultierenden Trocknungsspannungen offensichtlich noch keine befriedigende Lösung, wie die zahlreichen gerade auch in jüngster Zeit erschienenen Arbeiten zeigen [9, 20, 42, 85, 87, 88, 95, 107, 121, 119, 140, 63]. Zu der weitergehenden Problematik der Rißentstehung sind bis heute kaum Veröffentlichungen zu finden [127, 117].

Als internationale Standardwerke über Holz im allgemeinen können die Bücher von BODIG U. JAYNE [12], KOLLMANN U. CÔTÉ [76], WAGENFÜHR [138] und TSOUMIS [132] angesehen werden. Weitere deutschsprachige Bücher sind z.B. [26, 131, 101].

3 Identifikationsverfahren

In der Arbeit [39] gibt HARDTKE einen ausführlichen Überblick über die Struktur- und Parameteridentifikation linearer, zeitinvarianter Systeme. Obwohl es sich bei der hier behandelten Identifikation von Materialparametern im allgemeinen um nichtlineare und teilweise auch zeitabhängige Probleme handelt, können doch die in [39] beschriebenen Grundlagen und Definitionen im wesentlichen übernommen werden.

”Identifikation ist die Analyse eines Systems auf der Grundlage von zugehörigen gemessenen Daten, die zu einer Modellstruktur und deren Parameter oder bei bekannter Struktur zur Parameterbestimmung führt” [39].

Zu unterscheiden ist also zwischen der *Strukturidentifikation*, die grundsätzliche Aussagen zum Aufbau eines mathematischen Modells zur Beschreibung der wesentlichen Eigenschaften des Untersuchungsobjektes liefert, und der Parameteridentifikation, die sich mit der Bestimmung der tatsächlichen Größe der Modellparameter beschäftigt.

”Grundlage aller Identifikationsverfahren ist es also, von einem vorhandenen System auszugehen und mittels Messungen von Erreger- und zugehörigen Antwortfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ dessen Struktur und Parameter zu bestimmen. Dieses allgemeine Problem entspricht dem black-box-Fall. Ist die Struktur bekannt und sind nur die Parameter gesucht, so spricht man von Parameteridentifikation” [39].

In der vorliegenden Arbeit soll jedoch nicht ein ”vorhandenes System” identifiziert werden, sondern ein Werkstoff. Deshalb wird eine leicht abgeänderte Vorgehensweise eingeschlagen. Im Mittelpunkt steht nicht die Analyse experimentell gewonnener Meßdaten, sondern die Untersuchung und Anpassung verschiedener ”Systeme” hinsichtlich ihrer Identifizierbarkeit. Dabei besteht ein ”System” aus einem kontinuumsmechanisch begründeten Modell für das untersuchte Material sowie einem Modell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines Probekörpers aus eben diesem Material.

HARDTKE schreibt zur Modellfindung:

Das Modell ist *”...das abstrakte Abbild des realen technischen Systems bzw. Prozesses”* und muß *”dessen Verhalten in einem vorgegebenen Gültigkeitsbereich hinreichend beschreiben.”*

Dieses gilt sowohl für das Material- als auch für das Bauteilmodell. Je nachdem, wofür das Modell später verwendet werden soll (z.B. Holzbearbeitung oder Holz Trocknung) kann das Materialmodell skleronom oder rheonom sein und die Einflüsse von Feuchte und Temperatur berücksichtigen oder vernachlässigen. Bei der Bauteilmodellierung muß untersucht werden, ob eine vereinfachende Näherung als eindimensionales oder ebenes Problem zulässig ist, oder ob eine vollständige, dreidimensionale Beschreibung notwendig ist.

”Voraussetzung (für die theoretische Modellfindung) ist immer die Kenntnis der Konstruktionsabmessungen und der Materialdaten” [39].

Bei dem hier eingeschlagenen Weg sind jedoch gerade die Konstruktionsabmessungen gesucht, die unter Berücksichtigung der erwarteten Materialparameter eine gute Identifizierbarkeit ermöglichen. Wichtig ist der folgende Satz:

”Identifikation und theoretische Modellfindung bilden eine Einheit und ergänzen sich je nach Aufgabenstellung mehr oder weniger. Die Aufgaben der Identifikation erschöpfen sich nicht nur in der Verifizierung von Modellen und der Parameterbestimmung von vorgegebenen Strukturen” [39].

Einige wichtige Begriffe der Identifikationstheorie sind:

- **Beobachtbarkeit:** Beinflusst der zu identifizierende Parameter die beobachtete Antwort?
- **Steuerbarkeit:** Wird der zu identifizierende Parameter von der gewählten Eingangsfunktion angeregt?
- **Identifizierbarkeit:** Können die Parameter trotz evtl. Störungen identifiziert werden? Ist der identifizierte Parametersatz eindeutig?

”Die Prüfung auf volle Steuer- und Beobachtbarkeit bedeutet also, daß jedes Erregerelement x_i eine Wirkung auf den Ausgang y erzielt und daß jede Zustandsgröße im Ausgang y enthalten ist. Dabei sagt diese Prüfung noch nichts über die Güte z.B. der Beobachtbarkeit aus. Während die qualitative Aussage ... mit der Kenntnis der Struktur und der experimentellen Bedingungen getroffen werden kann, wird die Güte der Steuer- und Beobachtbarkeit entscheidend von den Parameterwerten abhängen” [39].

Obige Aussage trifft besonders für die Identifikation von Holz zu. Während die Struktur des Materialmodells für einen orthotropen Werkstoff im wesentlichen bekannt ist, beeinflussen die tatsächlichen Parameterwerte, die für jede Holzart unterschiedlich sind und eine unterschiedlich stark ausgeprägte Anisotropie beschreiben, wesentlich die Güte der Identifizierbarkeit. So ist auch die Identifizierbarkeit von an und für sich gleichartigen Parametern (Elastizitätsmoduln, Schubmoduln, Querdehnzahlen) in verschiedenen Richtungen aufgrund der unterschiedlichen Größenverhältnisse sehr unterschiedlich.

”Die Identifizierbarkeit setzt die vollständige Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit voraus” [39].

Diese Forderung läßt sich bei der Identifikation von Materialparametern im allgemeinen nicht erfüllen. Da das Material selbst einer experimentellen Untersuchung nicht zugänglich ist, sind alle Experimente immer auch an einen Prüfkörper bzw. ein Bauteil gebunden. Mit Hilfe von genauen Bauteilmodellen z.B. auf der Basis der FEM kann man zwar die Bauteileinflüsse weitestgehend vom reinen Materialverhalten trennen. Andererseits gelingt es jedoch nicht, die Einflüsse sämtlicher Materialparameter anhand von Versuchen an einem einzigen Bauteil durch geschickte Erregerwahl zu steuern oder durch aufwendige Meßmethoden zu beobachten. Für eine vollständige Identifikation ist man also immer auf mehrere Versuche an unterschiedlichen Prüfkörpern aus möglichst dem gleichen Material angewiesen. Anders als z.B. bei Stahl ist es jedoch bei Holz als einem natürlichen Rohstoff nahezu unmöglich, zwei identische Materialproben zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit

soll jedoch versucht werden, mit möglichst wenigen unterschiedlichen Versuchen möglichst viele Materialparameter gleichzeitig zu identifizieren.

Das Problem der Identifizierbarkeit läßt sich in die Teilprobleme Eindeutigkeit und Existenz der Lösung und Unterscheidbarkeit der Parameter untergliedern.

”Ein Parametersatz Θ ist parameteridentifizierbar, wenn das aus den Meßdaten gebildete Identifikationskriterium ein eindeutiges globales Minimum hat und dieses mit den gewählten experimentellen Mitteln und Algorithmen bestimmt werden kann” [39].

Zusätzlich zu der Forderung eines globalen Minimums kommt als Nebenbedingung, daß die identifizierten Parameter physikalisch sinnvoll sein müssen. So muß die vollständige Parametermatrix z.B. symmetrisch sein und darf keine negative Elastizität oder Kompressibilität beschreiben.

Anhand der Abbildung 3.1 sollen die Grundprinzipien der Identifikationsverfahren erläutert werden. Im wesentlichen handelt es sich dabei um drei Schritte:

- Der Fehlervektor zwischen System- und Modellgrößen wird bestimmt.
- Mittels eines geeigneten Fehlerkriteriums (Zielfunktional) wird dieser Fehlervektor bewertet. Häufig werden Least Square Verfahren (kleinste Fehlerquadrate) dazu eingesetzt. Zusätzliche a priori Informationen können in Form einer Wichtungsmatrix berücksichtigt werden.
- Das Zielfunktional wird durch Parameteranpassung minimiert. Dabei kommen häufig iterative Verfahren wie Newton-Raphson, konjugierte Gradienten oder auch kennwertnichtlineare Verfahren zum Einsatz.

Anders als in anderen Quellen steht in Abb. 3.1 nicht das eigentliche System am Anfang, sondern das Modell. Das wichtigste Werkzeug stellt die Sensitivitätsanalyse dar. Da für Holz relativ gute Startwerte aus der Literatur zur Verfügung stehen, scheint die damit verbundene Linearisierung um einen ”Arbeitspunkt” zumindest in erster Näherung zulässig zu sein. Zunächst werden also mit Hilfe dieses Werkzeuges dasjenige Modell und die zugehörige Erregerfunktion gesucht, die eine optimale Identifizierbarkeit der gesuchten Materialparameter gewährleisten. Erst dann wird ”die Realität der Theorie” angepaßt, indem ein entsprechendes System als Bauteil hergestellt wird, das zu einer mechanischen Belastung eine meßbare mechanische Antwort liefert. Diese Antwort wird mit der berechneten Antwort verglichen, wobei sowohl Meßfehler als auch Modellfehler das Ergebnis verfälschen können.

Bei der anschließenden Parameteroptimierung steht vor allem die Wahl eines geeigneten Zielfunktional im Vordergrund. Durch die vorhergehenden Schritte sollte das Problem dann soweit aufbereitet sein, daß an die Optimierungsalgorithmen keine besonderen Anforderungen mehr gestellt werden müssen. Unter Ausnutzung der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse kann eine iterative Parameteranpassung mit Hilfe von in vielen Programmpaketen standardmäßig zur Verfügung gestellten Algorithmen erfolgen.

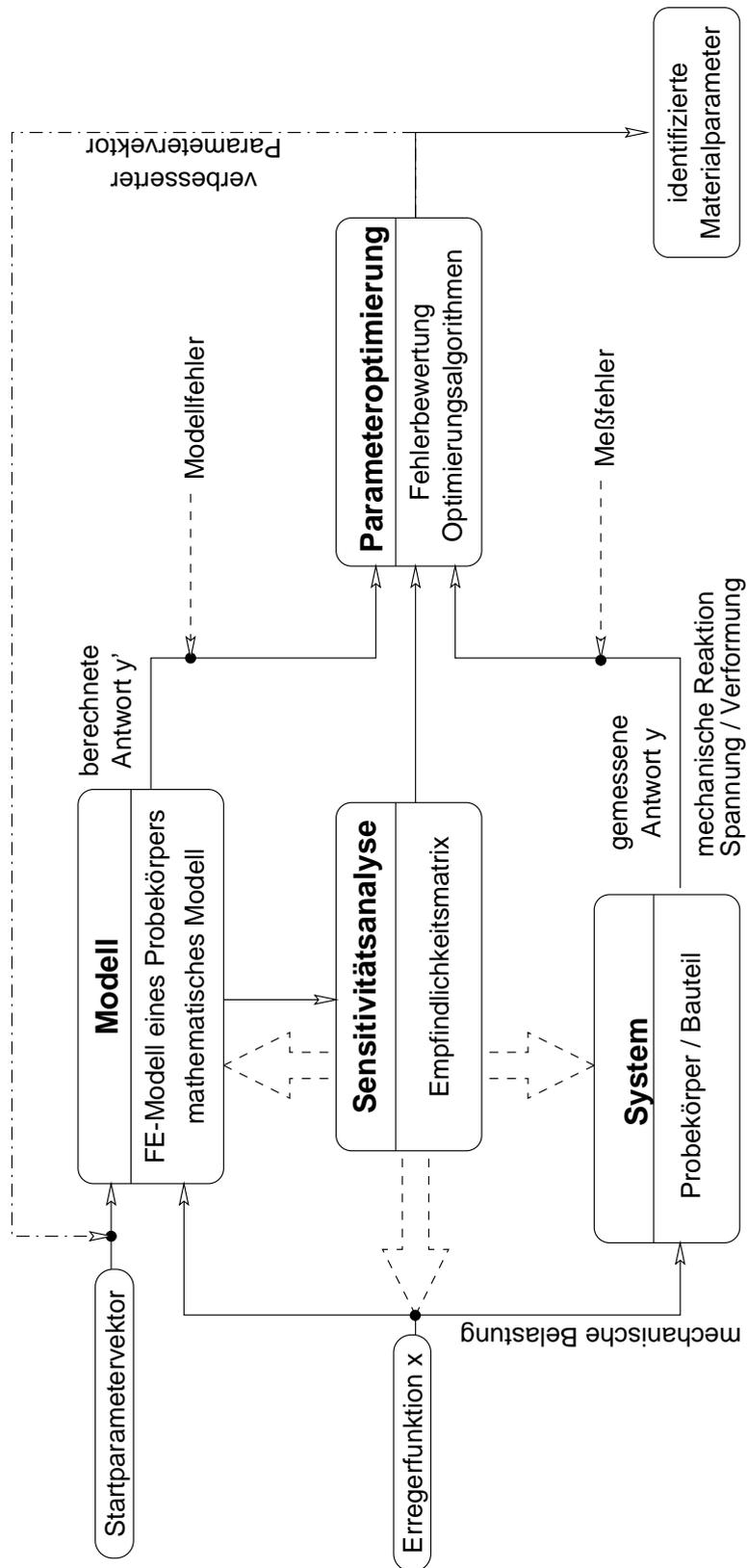


Abb. 3.1: Grundprinzip der verwendeten Identifikationsverfahren

4 Anatomie des Holzes

Für die Beschreibung von Holz ergeben sich mehrere unterschiedliche Strukturebenen, die auch als unterschiedliche Abstraktionsebenen für die Modellierung aufgefaßt werden können.

4.1 Makrostruktur

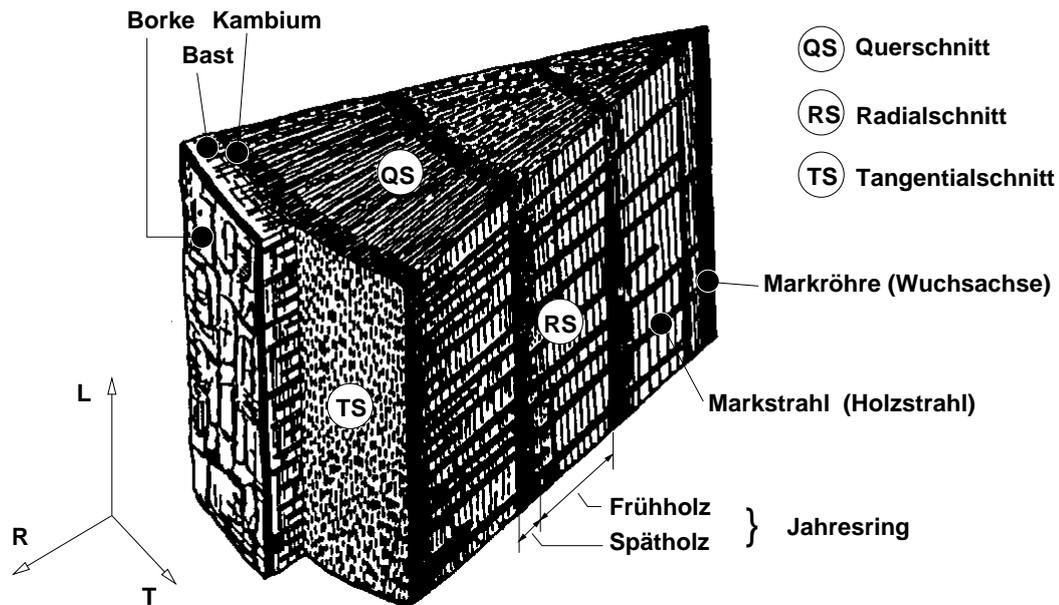


Abb. 4.1: Makrostruktur von Holz

Die Makrostruktur von Holz ist charakterisiert durch die zylinderschalenartig um die Wuchs-Achse angeordneten Jahrringe, die sich ihrerseits aus Früh- und Spätholz zusammensetzen (siehe Abb. 4.1). Diese Jahrringe sind auf das jahreszeitenbedingt unterschiedliche Wachstum zurückzuführen. Im Frühjahr bildet sich das im Vergleich zu dem später entstehenden Spätholz dünnwandigere und großporigere Frühholz.

Die inneren Schichten mit der Markröhre werden als Kern bezeichnet und können bei manchen Spezies und vor allem bei älteren Bäumen an einer dunkleren Farbe und einem geringeren Wassergehalt von den äußeren Schichten unterschieden werden, die als Splint bezeichnet werden. Daran schließt sich das Kambium an, die eigentliche Lebensschicht, in der die Wachstumsprozesse ablaufen. Nach außen hin wird das Holz durch Bast und Borke geschützt, die zusammen auch Rinde genannt werden. Die von der Markröhre strahlenförmig nach außen verlaufenden Transportkanäle werden als Mark- oder Holzstrahlen bezeichnet.

Diese Struktur legt eine Beschreibung mit Hilfe von Zylinderkoordinaten nahe, die bei ausreichendem Abstand von der Markröhre durch ein Kartesisches Koordinatensystem mit den Achsbezeichnungen *Längs*, *Radial* und *Tangential* angenähert werden können.

Diese Beschreibung stellt jedoch immer eine Idealisierung dar, deren Zulässigkeit für jeden Anwendungsfall überprüft werden muß. Abb. 4.4 veranschaulicht, daß jeder Baum ein Lebewesen ist und in Abhängigkeit von den Umgebungsbedingungen gezwungen sein kann, von dieser Idealform abzuweichen.

4.2 Mikrostruktur

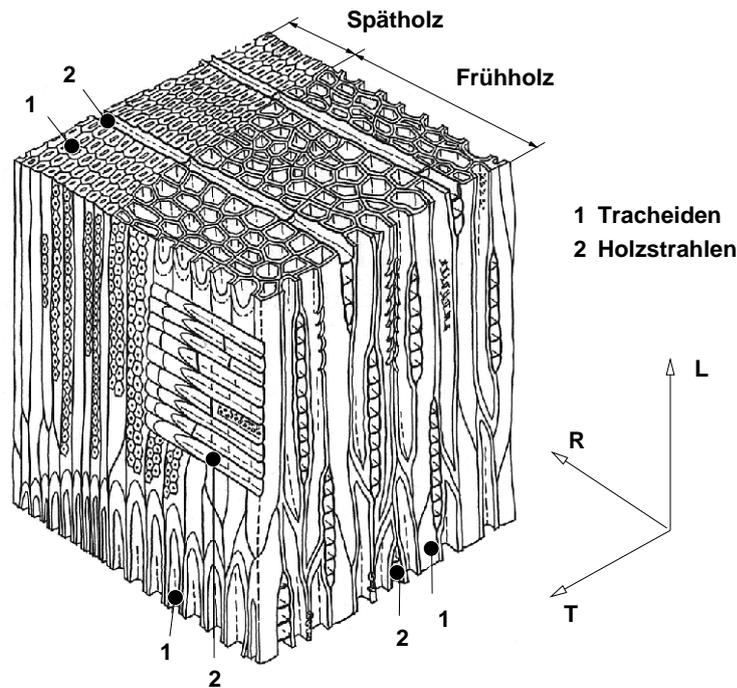


Abb. 4.2: Mikrostruktur von Holz

In der Abbildung 4.2 ist die Mikrostruktur von Holz dargestellt. Zu sehen ist ein Ausschnitt eines Jahresringes. Man erkennt, daß Holz ein poröser Verbundwerkstoff mit einer ausgeprägten Faserstruktur ist. Zu unterscheiden sind die schlauchartig parallel zur Längsrichtung des Baumstammes verlaufenden Tracheiden (1) sowie die in radialer Richtung angeordneten Holzstrahlen (2). Schon mit bloßem Auge kann man erkennen, daß das Spätholz wesentlich kompakter und weniger porös aufgebaut ist als das Frühholz.

Bei lebendem bzw. frisch geschlagenem Holz sind die Poren mit einem Wasser-Gas-Gemisch gefüllt, das bis zu 200% des eigentlichen Trockengewichtes ausmachen kann. Vor der Weiterverarbeitung muß das Holz deshalb getrocknet werden.

Für die kontinuumsmechanische Beschreibung kann die Mikrostruktur in erster Näherung "verschmiert" werden, so daß man ein homogenes, jedoch anisotropes Medium erhält. Die Jahrringe können für eine genauere Modellierung auch als periodische Inhomogenität berücksichtigt werden.

Die Abb. 4.3 zeigt einige Aufnahmen von Holz unter dem Mikroskop. Oben ist eine spanend bearbeitete Oberfläche zu sehen. Deutlich kann man den Übergang zwischen Früh-

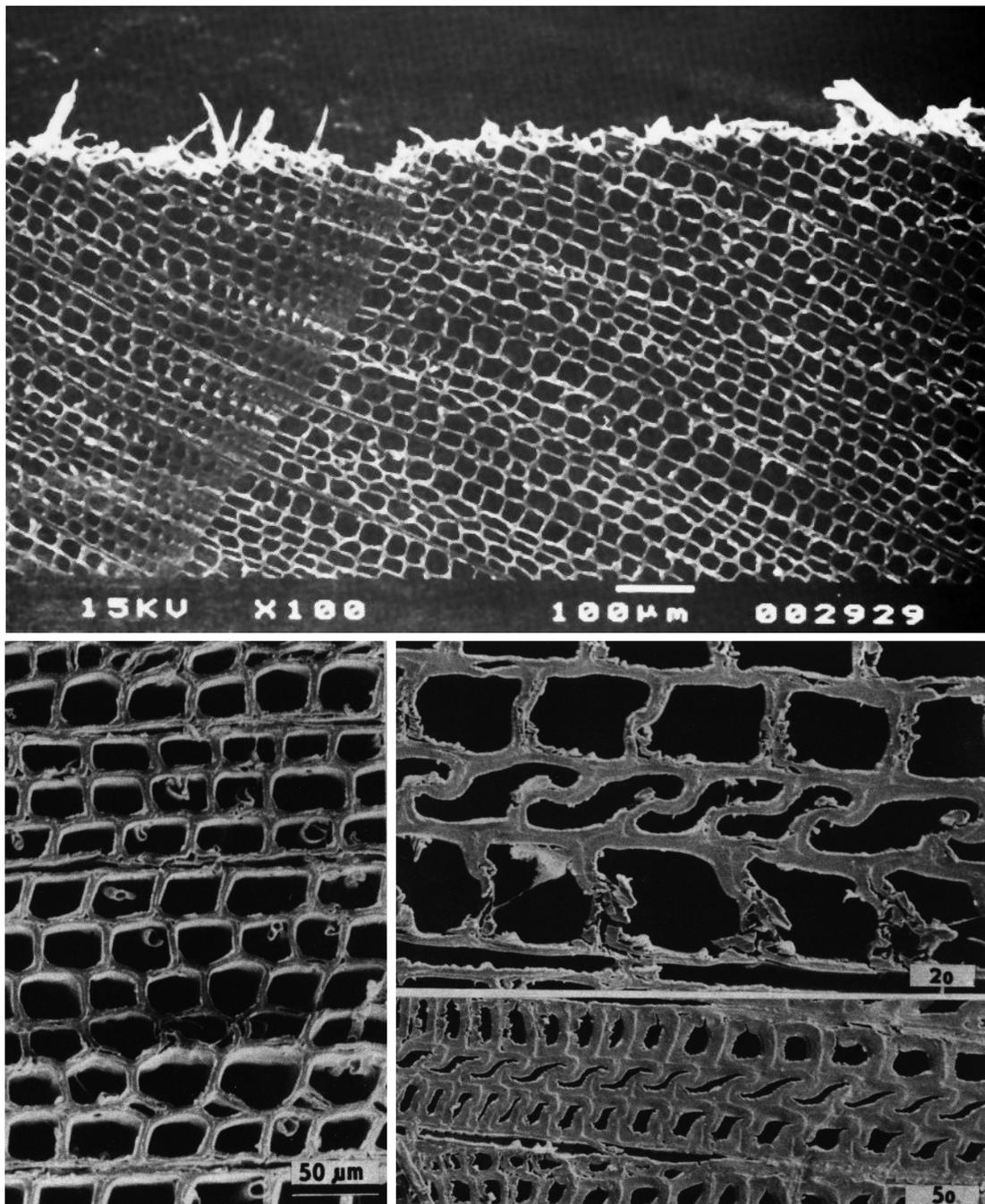


Abb. 4.3: Holz unter dem Mikroskop [21,81,109]

und Spätholz zu erkennen. Unten links sieht man einen unbelasteten Zellverband. Der rechts daneben abgebildete Zellverband, der sich unter mechanischem Druck verformt hat, verdeutlicht die Grenzen der kontinuumsmechanischen Beschreibung. Hier wird das makroskopische Verhalten deutlich durch das Versagen einzelner Zellen auf mikrostruktureller Ebene ausgelöst.

4.3 Wachstumseinflüsse

Wie Abb. 4.4 veranschaulicht, reagieren Bäume auf ihre Umgebungsbedingungen. Da die langgestreckten Fasern eine hohe Zugfestigkeit besitzen, aber schon bei deutlich geringem Druck durch Knicken versagen können, bilden sich im Baum Wachstumsspannungen. So stehen die äußeren Schichten im allgemeinen unter Zug, wodurch bei einer Biegebelastung z.B. durch Windkraft ein Überschreiten der Druckfestigkeit in diesen Bereichen vermieden wird. Wenn diese Belastungen aufgrund des Standortes Vorzugsrichtungen besitzen (vorherrschende Windrichtung, abschüssiges Gelände) reagiert der Baum durch unsymmetrisches Anlagern von Zellen und weicht dadurch von der Kreiszyylinderform ab. Dieses Reaktionsholz zeichnet sich außerdem durch veränderte Materialkennwerte aus. Bei Laubbäumen findet man Druckholz, wohingegen Nadelbäume Zugholz bilden.



Abb. 4.4: Ein "angepaßter" Baum

Ein weiteres wachstumsbedingtes Phänomen, das insbesondere bei der Holz Trocknung große Probleme bereitet, ist der Drehwuchs (spiral grain). Dabei winden sich die Holzfasern spiralförmig um die Wuchs-Achse. Beim Trocknen kann es dann dazu kommen, daß sich einzelne Balken oder ganze Holzstapel in sich verdrehen [105]. Hervorgerufen wird dieses Phänomen wahrscheinlich durch die Erdrotation und die damit verbundene Drehung der Sonneneinfallrichtung. Betroffen davon sind insbesondere jüngere Bäume. Es wird berichtet, daß die Richtung dieses Drehwuchses auf der Südhalbkugel entgegengesetzt zu der auf der Nordhalbkugel der Erde beobachteten ist.

5 Holz als anisotroper, elastischer Festkörper

In diesem Kapitel wird zunächst rein elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die Besonderheiten der beim Holz wichtigen und stark ausgeprägten Anisotropie werden analysiert und erläutert. Die Möglichkeiten zur Identifikation elastischer Materialparameter werden vorgestellt.

5.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Kontinuumsmechanik ist bemüht, die Reaktionen von Körpern auf äußere Belastungen vorherzusagen. Im allgemeinen handelt es sich dabei um Zusammenhänge zwischen Kraftgrößen und Weggrößen. Außerdem können Zeit, Masse und Temperatur explizit in den Gleichungen auftauchen. Die Einflüsse der Bauteilgeometrie und der Kinematik sollen von den Eigenschaften des Werkstoffes getrennt werden. Die Kontinuumsmechanik beruht auf der Annahme, daß das Werkstoffverhalten durch infinitesimal kleine Punkte beschrieben werden kann, aus denen sich durch Integration über die Bauteilgeometrie das Gesamtverhalten des Körpers ergibt. Diese Annahme gilt aber nur, solange die Integrationslängen deutlich größer sind als die charakteristischen Längen der Mikrostruktur des Körpers. Die Grenzen liegen z.B. bei Metallen in der Größe der Korngrenzen, bei Holz im Durchmesser der einzelnen Zellen. Im folgenden soll vorausgesetzt werden, daß diese Annahme erfüllt sei, d.h. daß die Materialeigenschaften über den Bereich mehrerer Zellverbände gemittelt oder "verschmiert" werden können.

Den einfachsten möglichen Zusammenhang zwischen Kraft und Weg beschreibt das *Hooke'sche* Elastizitätsgesetz, das einen Proportionalitätsfaktor in Form der elastischen Federkonstante einführt. Analog dazu erhält man das einfachste Materialgesetz durch Einführen eines Satzes von Proportionalitätsfaktoren zwischen den Komponenten des Spannungstensors σ und des Verzerrungstensors ε .

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (5.1)$$

In der obigen Gleichung laufen die Indizes i, j, k, l jeweils von Eins bis Drei. Über gleiche Indizes ist gemäß der *Einstein'schen* Summationskonvention zu summieren. Je nachdem, was Eingangs- und was Ausgangsgröße ist, kann (5.1) auch als Steifigkeit beschrieben werden:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (5.2)$$

Offensichtlich gilt zwischen $\underline{\underline{C}}$ und $\underline{\underline{J}}$ der Zusammenhang $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{J}}^{-1}$.

Der vierstufige Proportionalitätstensor wird auch als Werkstoff- oder Elastizitätstensor bezeichnet. Wegen der Gegenseitigkeit der Schubspannungen (*Boltzmann-Kontinuum*) sind sowohl der Spannungs- als auch der Verzerrungstensor symmetrisch. Dies stellt an

den Werkstofftensor die Symmetriebedingung, daß Komponenten mit innerhalb des ersten oder innerhalb des zweiten Indexpaares vertauschten Indizes gleich groß sein müssen.

$$J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{ijlk} = J_{jilk}. \quad (5.3)$$

Aus der weiterhin üblichen Annahme der Existenz eines elastischen Potentials ergibt sich zusätzlich eine Vertauschbarkeit der Indexpaare untereinander:

$$J_{ijkl} = J_{klij}. \quad (5.4)$$

Es ergibt sich, daß von den ursprünglich $3^4 = 81$ Komponenten aufgrund der Symmetriebedingungen nur 21 voneinander unabhängig sind. Deshalb kann man (5.1) auch in der *Voigt'schen* Matrixschreibweise formulieren:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

In der *Voigt'schen* Elastizitätsmatrix werden die ursprünglich jeweils vier Indizes der einzelnen Elastizitätszahlen paarweise zu zwei Indizes zusammengezogen. Dabei werden doppelt auftretende Indizes nur einfach geschrieben, unterschiedliche Indizes nach dem Muster $9 - i - j$ zusammengezogen. Beispiel: $1122 \rightarrow 12$, $1213 \rightarrow 65$.

Die Elastizitätsmatrix in (5.5) ist symmetrisch, d.h. $s_{ij} = s_{ji}$.

Die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Darstellungen werden in [94] ausführlich diskutiert. Dort findet sich auch ein Vorschlag für eine weitere Darstellungsform mit Hilfe von zweistufigen, sechsdimensionalen Tensoren, aus der sich anisotrope Eigentensoren ableiten lassen, die dem Deviator und dem hydrostatischen Anteil im isotropen Fall entsprechen.

In der Holzphysik ist es üblich, die drei Hauptachsen T , L und R in dieser Reihenfolge den Indizes 1 , 2 , und 3 zuzuordnen. Außerdem wird allgemein angenommen, daß sich aufgrund der Mikrostruktur das Holz bezüglich dieser drei Hauptachsen orthogonal isotrop (oder orthotrop) verhält. Normalspannungen in Richtung der Hauptachsen erzeugen also keine Schubverzerrungen, während Schubspannungen keine Normalverzerrungen hervorrufen. Gleichung (5.5) vereinfacht sich dadurch zu:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_T \\ \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \gamma_{LR} \\ \gamma_{TR} \\ \gamma_{TL} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_T \\ \sigma_L \\ \sigma_R \\ \tau_{LR} \\ \tau_{TR} \\ \tau_{TL} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Das Materialverhalten kann also durch neun unabhängige Parameter beschrieben werden. Diese Elastizitätszahlen hängen folgendermaßen mit den bei Ingenieuren gebräuchlicheren Elastizitätsmoduln E , Schubmoduln G und Querdehnzahlen ν zusammen:

$$E_T = 1/s_{11}; \quad G_{LR} = 1/s_{44}; \quad \nu_{TL} = -\frac{s_{12}}{s_{22}}. \quad (5.7)$$

Die anderen Parameter erhält man aus (5.7) durch zyklisches Vertauschen der Indizes. Hier wurde die spaltennormierte Schreibweise gewählt. Vereinzelt findet man in der Literatur auch eine zeilennormierte Schreibweise, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen wird. Vorsicht ist jedoch geboten bei der Übernahme von fremden Zahlenwerten. Zu beachten ist auch, daß bei den Querdehnzahlen ν_{ij} im Gegensatz zu den Elastizitätszahlen s_{ij} die Indizes nicht vertauscht werden dürfen. ($s_{ij} = s_{ji}$ aber $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$).

Weitere Anforderungen an die Elastizitätsmatrix sind:

Sie muß positiv definit sein, d.h. ihre Determinante muß größer Null sein

$$\det \underline{\underline{\mathbf{J}}} = (s_{11} s_{22} s_{33} + 2 s_{12} s_{13} s_{23} - s_{12}^2 s_{33} - s_{13}^2 s_{22} - s_{23}^2 s_{11}) s_{44} s_{55} s_{66} > 0 \quad (5.8)$$

und die Kompressibilitätsbedingung erfüllen. Letztere besagt, daß der Werkstoff bei hydrostatischer Druckbelastung sein Volumen beibehalten (= inkompressibel sein) oder verringern, nicht jedoch vergrößern kann. Daraus folgt:

$$s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2 (s_{12} + s_{13} + s_{23}) > 0. \quad (5.9)$$

Analog zur Kompressibilitätsbedingung für *isotrope* Werkstoffe kann man eine *Poisson'sche Konstante* μ_k definieren und aus (5.9) die Forderung ableiten:

$$\mu_k := -\frac{s_{12} + s_{13} + s_{23}}{s_{11} + s_{22} + s_{33}} < \frac{1}{2} \quad (5.10)$$

5.2 Koordinatentransformationen

Die Elastizitätsmatrix in Gleichung (5.6) gilt nur, solange die Spannungen und die Verzerrungen auf die Hauptachsen T, L, R bezogen werden. Spannungen und Verzerrungen, die in einer anderen Basis vorliegen, müssen transformiert werden. Dazu eignet sich am besten die Tensordarstellung aus Gleichung (5.1). Gelegentlich findet man in der Literatur auch Transformationsregeln für die Matrixdarstellung. Diese Transformationsregeln können aber nicht die Symmetrie, Eleganz und Systematik der Tensorschreibweise ausnutzen und sind deshalb sehr unübersichtlich. Der für eine beliebig gegenüber den Hauptachsen verdrehte, kartesische Basis gültige Werkstofftensor J'_{abcd} ergibt sich durch die Multiplikation mit den Metrikkoeffizienten g_{ai} entsprechend Gleichung (5.11):

$$J'_{abcd} = g_{ai} g_{bj} g_{ck} g_{dl} J_{ijkl}. \quad (5.11)$$

Die Transformation läßt sich am günstigsten unter Verwendung von *Euler*-Winkeln beschreiben. Sie besteht aus drei aufeinanderfolgende Drehungen um die Y -Achse (Winkel α), um die neue X' -Achse (Winkel β) und schließlich um die neue Y'' -Achse (Winkel γ).

Entsprechend der in der Holzphysik üblichen Konvention werden hier die Drehachsen L, T' und L'' gewählt (siehe Abb.5.1). Euler-Winkel haben gegenüber *Kardan*-Winkeln (Drehachsen Z, Y', X'') den Vorteil, daß sich einzelne Richtungen mit nur zwei Drehungen beschreiben lassen, wie später erläutert werden wird.

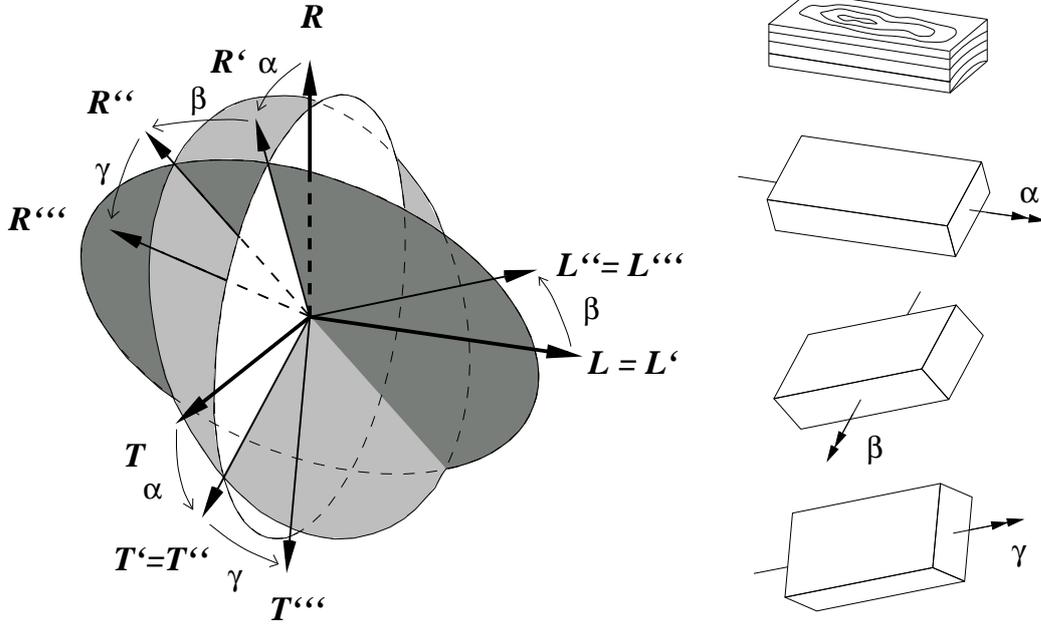


Abb. 5.1: Transformation mit Euler-Winkeln

Die Metrikkoeffizienten g_{ai} ergeben sich dann zu

$$g_{ai}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}; \quad g_{ai}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}; \quad g_{ai}^{\gamma} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Die Reihenfolge der Drehungen ist nicht beliebig.

Als nächstes müssen die Elastizitätszahlen s_{ji} den Tensorkomponenten J_{ijkl} bzw. C_{ijkl} zugeordnet werden. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} i = j \wedge k = l: & \quad J_{ijkl} = s_{ik}; & \quad C_{ijkl} = c_{ik}; \\ i = j \wedge k \neq l: & \quad J_{ijkl} = \frac{1}{2} s_{(i)(9-j-k)}; & \quad C_{ijkl} = c_{(i)(9-j-k)}; \\ i \neq j \wedge k \neq l: & \quad J_{ijkl} = \frac{1}{4} s_{(9-i-j)(9-k-l)}; & \quad C_{ijkl} = c_{(9-i-j)(9-k-l)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nun kann Gleichung (5.11) zur Anwendung kommen. Die manuelle Auswertung ist sehr mühsam und fehleranfällig. Aber moderne Mathematikprogramme sind in der Lage, solche Gleichungen symbolisch zu lösen. Im vorliegenden Fall wurde die Lösung dem Programmpaket MATHEMATICA [143] übertragen. Als Ergebnis erhält man jede einzelne Komponente s'_{ij} einer transformierten Elastizitätsmatrix als Funktion der Winkel α, β und γ sowie der neun unabhängigen Elastizitätszahlen s_{ij} .

Durch eine Typunterscheidung lassen sich diese Gleichungen recht übersichtlich zusammenfassen:

1. Die Nachgiebigkeit bei Zugbelastung in beliebiger Richtung ist dank der Wahl von *Euler*-Winkeln nur eine Funktion der Winkel α und β . Der Winkel γ beschreibt lediglich die Orientierung einer fiktiven Zugprobe senkrecht zur Beanspruchungsrichtung.
2. Die Torsion kreisrunder Stäbe um eine Torsionsachse mit dem Index L kann beschrieben werden durch einen Drillungsmodul D_L , der sich als Linearkombination der beiden beteiligten Schubmoduln ergibt:

$$\frac{1}{D_L} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{LR}} + \frac{1}{G_{TL}} \right) = \frac{1}{2} (s_{44} + s_{55}). \quad (5.14)$$

Die Lage der Torsionsachse kann wie die Zugrichtung ebenfalls eindeutig durch die beiden Winkel α und β beschrieben werden.

3. Lediglich für die Beschreibung des Querdehnverhaltens werden alle drei Winkel α , β und γ benötigt. Die Beanspruchungsrichtung wird wie im Fall 1 durch α und β festgelegt, der Winkel γ bezeichnet die Meßrichtung.

Nachdem die Ergebnisse des Mathematikprogrammes manuell umsortiert und weiter vereinfacht wurden – diese Arbeit kann das Programm noch nicht optimal durchführen – ergeben sich folgende Transformationsregeln:

Die Nachgiebigkeit für eine einachsige Zugbeanspruchung in der durch α und β charakterisierten Richtung ergibt sich als:

$$\begin{aligned} s'_{22}(\alpha, \beta) &= s_{22} \cos^4(\beta) \\ &+ \cos^2(\beta) \left[(2s_{23} + s_{44}) \cos^2(\alpha) + (2s_{12} + s_{66}) \sin^2(\alpha) \right] \sin^2(\beta) \\ &+ \left[s_{33} \cos^4(\alpha) + (2s_{13} + s_{55}) \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) + s_{11} \sin^4(\alpha) \right] \sin^4(\beta). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die Verdrillungselastizität kreisrunder Stäbe ergibt sich entsprechend Gleichung (5.14). Der Fall $\alpha = \beta = \gamma = 0$ entspricht einer Torsion um die L -Achse.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(s'_{44} + s'_{66}) &= 2 \sin(\beta)^2 \left[\left(\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 \sin(\alpha)^4 \right) s_{11} \right. \\ &\quad - 2 \cos(\beta)^2 \sin(\alpha)^2 s_{12} - 2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 \sin(\beta)^2 s_{13} \\ &\quad + \cos(\beta)^2 s_{22} - 2 \cos(\alpha)^2 \cos(\beta)^2 s_{23} \\ &\quad + \left(\cos(\alpha)^4 \cos(\beta)^2 + \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 \right) s_{33} \\ &\quad \left. + \cos(\alpha)^2 \cos(\beta)^2 \sin(\alpha)^2 s_{55} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\cos(\alpha)^2 \cos(2\beta)^2 + \cos(\beta)^2 \sin(\alpha)^2 \right) s_{44} \right. \\ &\quad + \cos(2\alpha)^2 \sin(\beta)^2 s_{55} \\ &\quad \left. + \left(\cos(\alpha)^2 \cos(\beta)^2 + \cos(2\beta)^2 \sin(\alpha)^2 \right) s_{66} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die Querdehnung ist eine Funktion aller drei Winkel:

α und β beschreiben die Belastungsrichtung, γ gibt die Messrichtung an.

$$\begin{aligned}
 s'_{12} = & \cos(\gamma)^2 \left[\cos(\beta)^2 \left(\cos(\alpha)^2 s_{12} + \sin(\alpha)^2 s_{23} \right) \right. \\
 & \left. + \sin(\beta)^2 \left(\cos(\alpha)^4 s_{13} + \sin(\alpha)^4 s_{13} + \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 (s_{11} + s_{33} - s_{55}) \right) \right] \\
 & + \cos(\gamma) \sin(\gamma) \left[2 \cos(\alpha) \cos(\beta)^3 \sin(\alpha) (s_{23} - s_{12}) + \frac{1}{2} \cos(\beta) \sin(2\alpha) \sin(\beta)^2 \right. \\
 & \left. \left(s_{66} - s_{44} - \cos(2\alpha) s_{55} + s_{33} + \cos(2\alpha) s_{33} - 2 \sin(\alpha)^2 s_{11} - 2 \cos(2\alpha) s_{13} \right) \right] \quad (5.17) \\
 & + \sin(\gamma)^2 \left[(\cos(\beta)^4 + \sin(\beta)^4) (\sin(\alpha)^2 s_{12} + \cos(\alpha)^2 s_{23}) \right. \\
 & \left. + \cos(\beta)^2 \sin(\beta)^2 \left(\sin(\alpha)^4 s_{11} + s_{22} + \cos(\alpha)^4 s_{33} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos(\alpha)^2 s_{44} + \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 (2s_{13} + s_{55}) - \sin(\alpha)^2 s_{66} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Transformationsregeln läßt sich veranschaulichen, indem man für die Elastizitätszahlen s_{ij} Zahlenwerte einsetzt. Eine Übersicht liefert die Tabelle 17 im Anhang, die auf der Arbeit von KEYLWERTH [67] basiert. Die Abbildung A.1 (ebenfalls im Anhang) stellt beispielhaft dar, wie sich mit Hilfe von MATHEMATICA aus den Gleichungen (5.15) bis (5.17) "Körper der Deformierbarkeit" berechnen lassen.

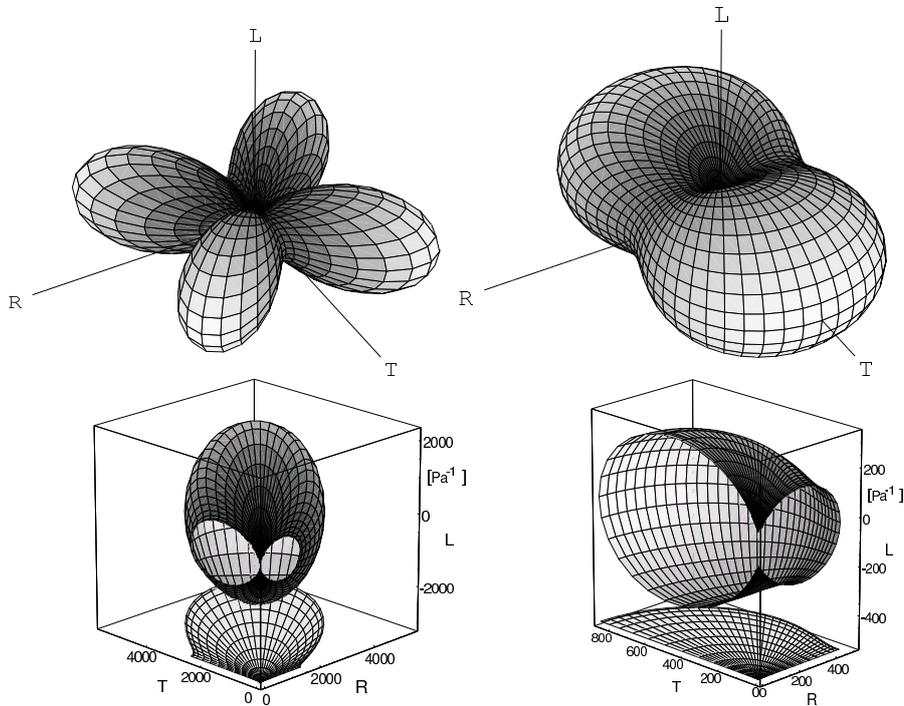


Abb. 5.2: Deformationskörper für Zug: Fichte (links) und Buche (rechts)

Die Abbildung 5.2 zeigt solche "Körper der Deformierbarkeit" für Nadel- und Laubholz am Beispiel von Fichte und Buche. Zweidimensionale Schnitte durch diese Körper, die

man auch als Polardiagramm bezeichnet, finden sich zwar schon in früheren Arbeiten (auch in [67]). Aber die volle dreidimensionale Darstellung ist erst mit Hilfe der modernen Computergrafik möglich geworden und wird hier erstmalig vorgestellt.

Beim Nadelholz zeigt sich eine deutlich ausgeprägtere Anisotropie. Während sich Buche unter einer Zugbelastung in tangentialer Richtung am stärksten verformt, ergeben sich die größten Verformungen bei Fichtenholz für Belastungen unter 45° zu den Hauptachsen. Das ist auf den extrem kleinen Schubmodul G_{TR} von Fichtenholz zurückzuführen.

Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Deformierbarkeit durch Torsion (Abb. 5.3). Die größten Deformationen treten hier auf, wenn die Torsionsachsen mit der tangentialen oder radialen Hauptachse zusammenfallen. Im Gegensatz zum Nadelholz verhält sich Laubholz bezüglich der Torsion nahezu isotrop.

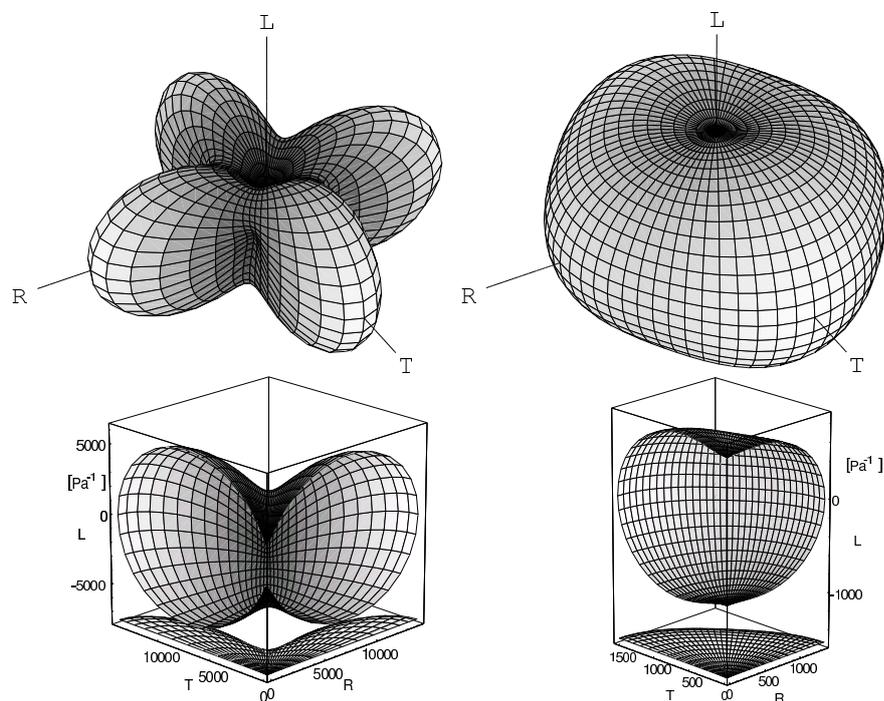


Abb. 5.3: Deformationskörper für Torsion: Fichte (links) und Buche (rechts)

Bei vollständiger Auswertung der in Tab. 17 verfügbaren Materialparameter zeigt es sich, daß die Körper der Deformierbarkeit aller Holzarten eindeutig in die Klassen Laubholz oder Nadelholz einzuordnen sind und daß sich qualitativ erstaunlich ähnliche Bilder ergeben. Die Nadelhölzer sind in der Tat kaum voneinander zu unterscheiden. Lediglich bei den Laubhölzern treten leichte Variationen auf. Als Beispiel sind in Abb. 5.4 die beiden Tropenhölzer Balsa und Mahagoni gegenübergestellt. Balsa weist eine für Laubhölzer ausgeprägte Anisotropie auf, wobei sowohl für Zug (obere Bildhälfte) als auch für Torsion (untere Bildhälfte) die T -Achse die nachgiebigste Richtung darstellt. Mahagoni dagegen ist nur relativ schwach anisotrop.

Da die Querdehnung eine Funktion von drei Winkeln ist, läßt sie sich in einer dreidimensionalen Abbildung nicht vollständig darstellen. Am Computerbildschirm kann man die

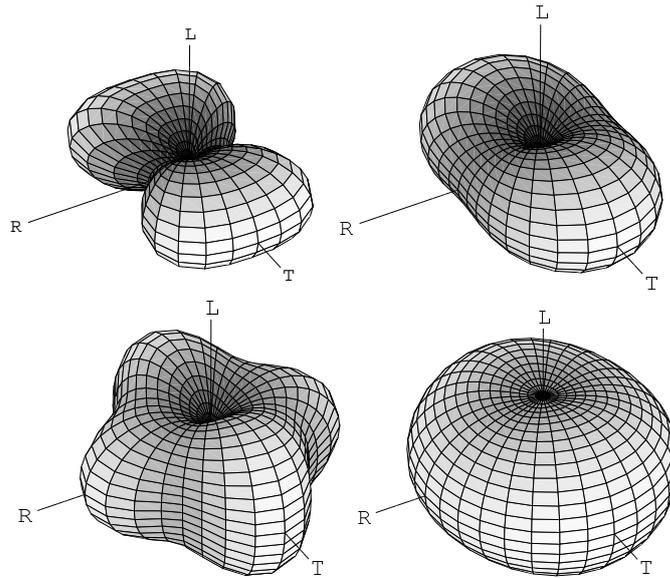


Abb. 5.4: Deformationskörper für Balsa (links) und Mahagoni (rechts)

fehlende vierte Dimension im Rahmen einer Animation erahnen, die sich jedoch nicht in gedruckter Form wiedergeben läßt. In Abb. 5.5 wurden deshalb nur die Winkel α und β kontinuierlich im Bereich zwischen Null und $\pi/2$ variiert. Der Winkel γ wurde – von links nach rechts – auf $\gamma = 0$, $\gamma = \pi/4$ und $\gamma = \pi/2$ gesetzt. Auch hier zeigt sich eine deutliche Richtungsabhängigkeit. Besonders interessant ist die rechte Abbildung, die einen Bereich mit positiven Querdehnzahlen enthält. Das bedeutet, daß eine in dieser Richtung ($\alpha = \beta = \pi/4, \gamma = \pi/2$) orientierte Holzprobe unter einachsiger Zugbelastung gleichzeitig *länger und dicker* wird. Dieses Phänomen konnte auch in einer FEM-Rechnung aufgezeigt werden, wurde aber bisher noch nicht experimentell nachgewiesen. Es tritt laut den in der Literatur zu findenen Elastizitätszahlen bei allen Nadelhölzern und einigen Laubhölzern auf.

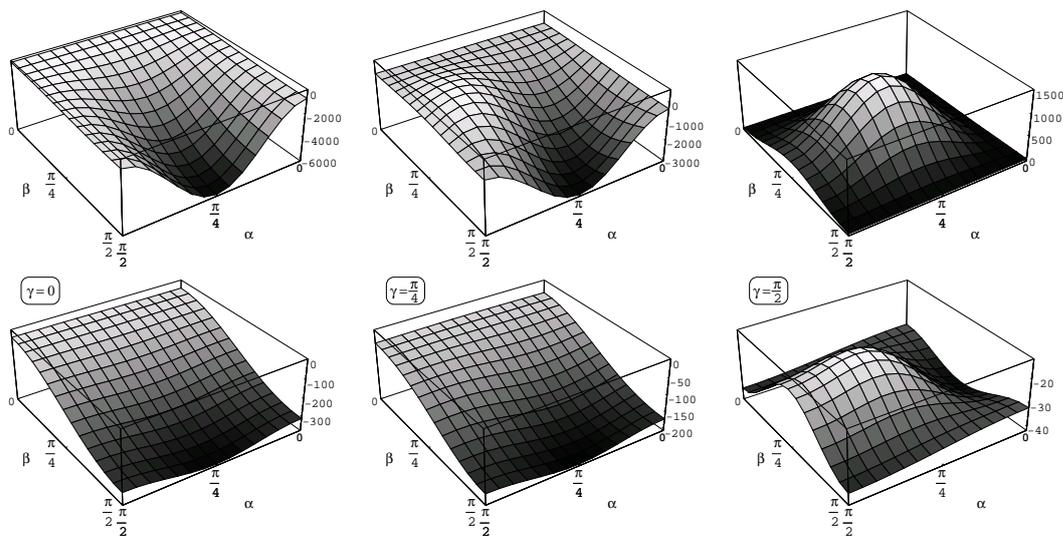


Abb. 5.5: Deformationsflächen für Querdehnung: Fichte (oben) und Buche (unten)

5.3 Sensitivitätsanalyse für Zugversuche

Bevor die bisher dargestellten Zusammenhänge hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit für die Identifikation von Materialparametern untersucht werden, soll anhand einer fiktiven Beispielaufgabe die Auswahl einer für dieses Problem geeigneten Sensitivitätsfunktion erläutert werden.

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ als:

$$f(x) = A \sin(\phi(x)), \quad (5.18)$$

der eine Störfunktion $r(x)$ überlagert ist:

$$r(x) = R \sin(\psi(x)). \quad (5.19)$$

Gesucht sei die günstigste Stelle x , an der die resultierende Funktion $M(x)$

$$M(x) = f(x) + r(x) \quad (5.20)$$

gemessen werden muß, um möglichst genaue Aussagen über die Größe der Amplitude A machen zu können. Alle beteiligten Amplituden und Funktionen dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

Zur Veranschaulichung wird das folgende Zahlenbeispiel betrachtet:

$$A = R = 0.5 ; \quad \phi(x) = 3x ; \quad \psi(x) = 5x . \quad (5.21)$$

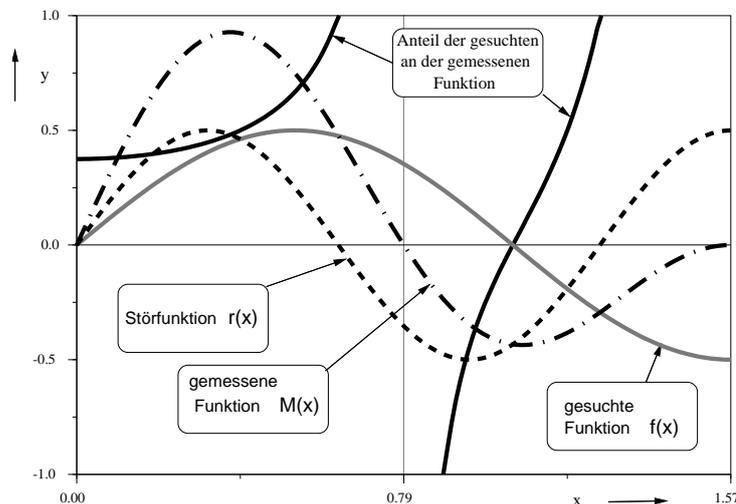


Abb. 5.6: Sensitivitätsanalyse: Aufgabenstellung

Die partielle Ableitung $\partial M / \partial A$ der gemessenen Funktion M nach der gesuchten Amplitude A führt auf die mit A verknüpfte Winkelfunktion und liefert die Aussage, daß günstige Meßstellen in den Extrema dieser Winkelfunktion zu suchen sind. Ein Blick auf Abb. 5.6 zeigt jedoch, daß unter Umständen gerade an diesen Stellen ($x = \pi/2$) die meßbare Funktion M verschwindet und somit keine quantitative Aussage möglich ist. Berechnet man

den absoluten Anteil $f(x)/M(x)$ der gesuchten Funktion an der gemessenen Funktion für jede Stelle x , so erhält man sinnvolle Werte nur für Bereiche, in denen die gesuchte Funktion $f(x)$ und die Störfunktion $r(x)$ annähernd phasengleich sind. An den Stellen, wo die Meßfunktion verschwindet, treten unendliche Sprünge auf. Diese Unendlichkeitsstellen lassen sich heben, indem man den Anteil nicht auf die tatsächliche Meßfunktion bezieht, sondern entsprechend Gl.(5.22) auf die Summe der Beträge von gesuchter Amplitude A und dem aktuellen Wert der Störfunktion:

$$\text{Korrigierter Anteil} = \frac{f(x)}{|A| + |r(x)|}. \quad (5.22)$$

Wie man Abb. 5.7 entnehmen kann, ergibt dieser korrigierte Anteil eine stetige Funktion mit Werten zwischen 1 und -1 . Extrema finden sich an den Stellen, wo gerade die Störfunktion verschwindet. Die absolute Höhe dieser Extrema wird durch die Phasenlage der gesuchten Funktion $f(x)$ bestimmt. Zwischen den Extremstellen schmiegt sich die korrigierte Anteilsfunktion an die gesuchte Funktion. Leider verschwindet sie jedoch nicht für $x = \pi/4$ und $x = \pi/2$, wo die Meßfunktion ihre Nulldurchgänge aufweist. Es kann jedoch eine Wichtungsfunktion eingeführt werden, die in den gleichphasigen Bereichen den Wert ± 1 hat und deren Nulldurchgänge gerade mit denen der Meßfunktion zusammenfallen.

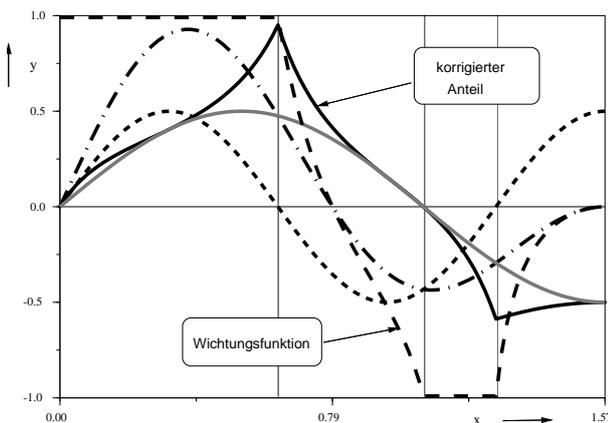


Abb. 5.7: Sensitivitätsanalyse:
Lösungsansätze

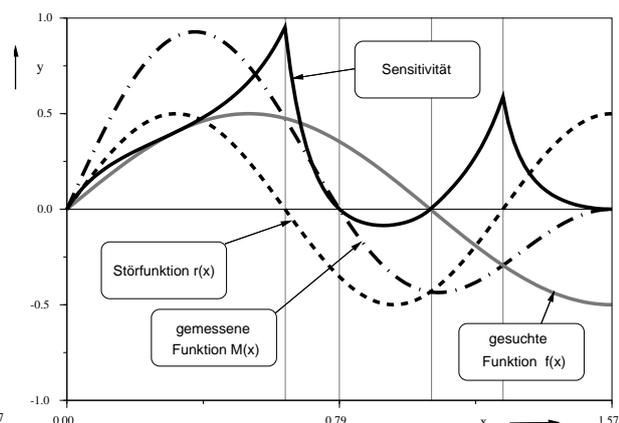


Abb. 5.8: Sensitivitätsanalyse: Resultierende Sensitivitätsfunktion

In Abbildung 5.8 ist eine Sensitivitätsfunktion eingezeichnet, die sich aus der multiplikativen Überlagerung der Anteils- und der Wichtungsfunktion ergibt.

$$\Phi(x) = \frac{M(x)}{|f(x)| + |r(x)|} \frac{f(x)}{|A| + |r(x)|}. \quad (5.23)$$

Sie ist stetig und kann Werte zwischen 1 und -0.1 annehmen. Maximale Sensitivität erhält man, wenn die Störfunktion gerade verschwindet und die gesuchte Funktion ihr Maximum durchläuft. Sind gesuchte Funktion und Störfunktion gleich groß, ergibt sich eine Sensitivität von 0.5. An Stellen, wo die gemessene Funktion verschwindet, besitzt auch die Sensitivitätsfunktion eine Nullstelle.

Mit Hilfe dieser Sensitivitätsfunktion und der Transformationsregel (5.15) soll nun untersucht werden, inwieweit es möglich ist, einen vollständigen Satz von Elastizitätszahlen anhand von einachsigen Zugversuchen an unterschiedlich orientierten Proben zu identifizieren. In den folgenden Tabellen wird diese Sensitivitätsanalyse schrittweise für einige ausgewählte Orientierungen durchgeführt.

	Orientierung der Zugproben						
	T	L	R	LR	TR	TL	TLR
s_{11}	1	0	0	0	0.25	0.25	0.11
s_{22}	0	1	0	0.25	0	0.25	0.11
s_{33}	0	0	1	0.25	0.25	0	0.11
s_{44}	0	0	0	0.25	0	0	0.11
s_{55}	0	0	0	0	0.25	0	0.11
s_{66}	0	0	0	0	0	0.25	0.11
s_{12}	0	0	0	0	0	0.5	0.22
s_{13}	0	0	0	0	0.5	0	0.22
s_{23}	0	0	0	0.5	0	0	0.22

Tab. 1: Ableitung der Dehnung nach den einzelnen Elastizitätszahlen

	Orientierung der Zugproben						
	T	L	R	LR	TR	TL	TLR
s_{11}	100	0	0	0	8.4	66.0	7.7
s_{22}	0	100	0	2.0	0	1.6	0.2
s_{33}	0	0	100	47.2	4.8	0	4.4
s_{44}	0	0	0	52.5	0	0	4.9
s_{55}	0	0	0	0	90.8	0	82.9
s_{66}	0	0	0	0	0	34.1	4.0
s_{12}	0	0	0	0	0	-1.7	-0.2
s_{13}	0	0	0	0	-4.0	0	-3.7
s_{23}	0	0	0	-1.8	0	0	-0.2

Tab. 2: Anteile der einzelnen Elastizitätszahlen an der Gesamtdehnung (Fichte)

Einen ersten Anhaltspunkt für diese Empfindlichkeit liefern die partiellen Ableitungen $\partial s'_{22}/\partial s_{ij}$ von Gleichung (5.15), die der Tabelle 1 zu entnehmen sind. Danach wird die Längsdehnung von Zugproben, die parallel zu den Hauptachsen orientiert sind, wie zu erwarten allein durch die entsprechenden Elastizitätsmoduln bzw. deren Kehrwerte s_{11} , s_{22} und s_{33} bestimmt. Bei Orientierungen unter einem Winkel von 45° zu jeweils zwei Hauptachsen setzt sich die resultierende Elastizitätszahl aus jeweils einem E-Modul, zwei Schubmoduln und einer Querdehnzahl zusammen, deren Einflüsse jedoch durch Vorfaktoren < 1 geschwächt werden.

Für Tabelle 2 wurden konkrete Elastizitätszahlen für Fichtenholz nach [67] berücksichtigt und die prozentualen Anteile an der Gesamtdehnung berechnet, die auf die einzelnen Elastizitätszahlen zurückzuführen sind. Hier zeigt sich zum einen wieder der große Einfluß der Schubzahl s_{55} , der schon in Bild 5.2 zu erkennen war. Außerdem sieht man, daß die Gesamtverformung durch die Querdehnzahlen s_{12} , s_{13} und s_{23} *verringert* wird. Tabelle 2 berücksichtigt nicht, wie groß die Gesamtdehnungen bei den jeweiligen Orientierungen tatsächlich sind, was jedoch für die Meßauflösung bei entsprechenden Experimenten eine wichtige Rolle spielt.

In Tabelle 3 ist die Sensitivität nach Gleichung (5.23) aufgeführt. Die relative Sensitivität Φ_{rel} in Tabelle 4 berücksichtigt zusätzlich das Verhältnis der in einer bestimmten Richtung gemessenen Dehnung zu der größtmöglichen Dehnung bei Hauptachsen-Orientierung.

$$\Phi_{rel}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Phi(\alpha, \beta, \gamma)}{\max(s_{11}, s_{22}, s_{33})}. \quad (5.24)$$

Besonders Tabelle 4 zeigt, wie unterschiedlich die Empfindlichkeiten bei der Identifikation von Elastizitätszahlen aus Zugversuchen sind.

	Orientierung der Zugproben						
	T	L	R	LR	TR	TL	TLR
s ₁₁	100	0	0	0	6.7	22.2	4.8
s ₂₂	0	100	0	1.9	0	1.6	0.2
s ₃₃	0	0	100	19.5	4.2	0	3.3
s ₄₄	0	0	0	20.4	0	0	3.5
s ₅₅	0	0	0	0	24.4	0	10.9
s ₆₆	0	0	0	0	0	16.9	3.0
s ₁₂	0	0	0	0	0	-1.6	-0.2
s ₁₃	0	0	0	0	-3.3	0	-2.9
s ₂₃	0	0	0	-1.6	0	0	-0.2

Tab. 3: Absolute Sensitivitäten

	Orientierung der Zugproben						
	T	L	R	LR	TR	TL	TLR
s ₁₁	100	0	0	0	20.0	8.4	6.9
s ₂₂	0	2.5	0	0.6	0	0.6	0.3
s ₃₃	0	0	57.2	5.9	12.5	0	4.7
s ₄₄	0	0	0	6.2	0	0	5.1
s ₅₅	0	0	0	0	72.5	0	15.7
s ₆₆	0	0	0	0	0	6.4	4.4
s ₁₂	0	0	0	0	0	-0.6	-0.3
s ₁₃	0	0	0	0	-9.9	0	-4.1
s ₂₃	0	0	0	-0.5	0	0	-0.2

Tab. 4: Relative Sensitivitäten

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde nicht berücksichtigt, daß sich bei nicht parallel zu den Hauptachsen orientierten Zugproben trotz einachsiger Belastung kein einachsiger, sondern ein komplexer, dreidimensionaler Verformungszustand einstellt. Außerdem stellt die Beschreibung der Orthogonalität in einer kartesischen Basis eine Näherung dar, die nur für kleine Proben aus den äußeren Schichten eines großen Stammes gilt. Andernfalls muß die Krümmung der Jahresringe berücksichtigt werden, wozu eine zylindrische Basis besser geeignet ist. Zur Veranschaulichung wurden deshalb mit dem FE-Programm ANSYS die Verformungen eines einachsiger belasteten Zugstabes berechnet, der aus der Nähe der Wuchsschule und unter einem Winkel von 45° zur Faserlängsrichtung entnommen wurde.

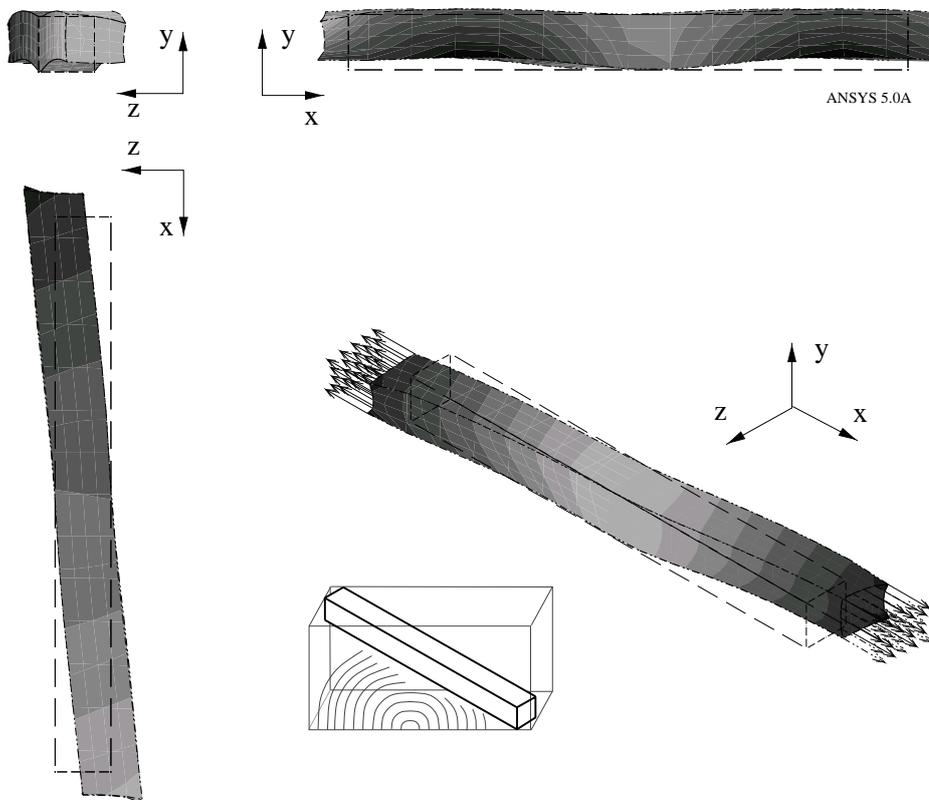


Abb. 5.9: Mögliche Verformungen einer Holzprobe unter einachsiger Zugbelastung

Aufgrund der Krümmung der Jahrringe verwölbt sich der Zugstab, wie in Abb. 5.9 rechts oben zu erkennen ist. In der Schnittebene senkrecht dazu treten Schubverformungen auf. Dieses Verformungsverhalten muß zum einen bei der Durchführung der Versuche beachtet werden, damit es nicht aufgrund der Einspannung oder der Krafteinleitung zu Verformungsbehinderungen kommt. Zum anderen könnte sich hier aber auch die Möglichkeit ergeben, durch zusätzliche Verschiebungsmessungen an mehreren Punkten oder durch Erfassung des gesamten Verschiebungsfeldes mittels optischer Verfahren zusätzliche Parameterinformationen aus solch einem Zugversuch zu gewinnen.

5.4 Identifikation von Querdehnzahlen aus Biegeversuchen

Querdehnzahlen können indirekt aus Biegeversuchen bestimmt werden. Unterwirft man einen dünnen Plattenstreifen, wie in Abb. 5.10 dargestellt, einer reinen Biegung, so ergibt sich aufgrund der überlagerten Längs- und Querdehnung eine sattelförmige Verwölbung der Oberfläche. Die Höhenlinien dieser doppelten Krümmung sind Hyperbeln, deren Asymptoten sich im mittleren Bereich des Probekörpers unter dem Winkel 2α schneiden.

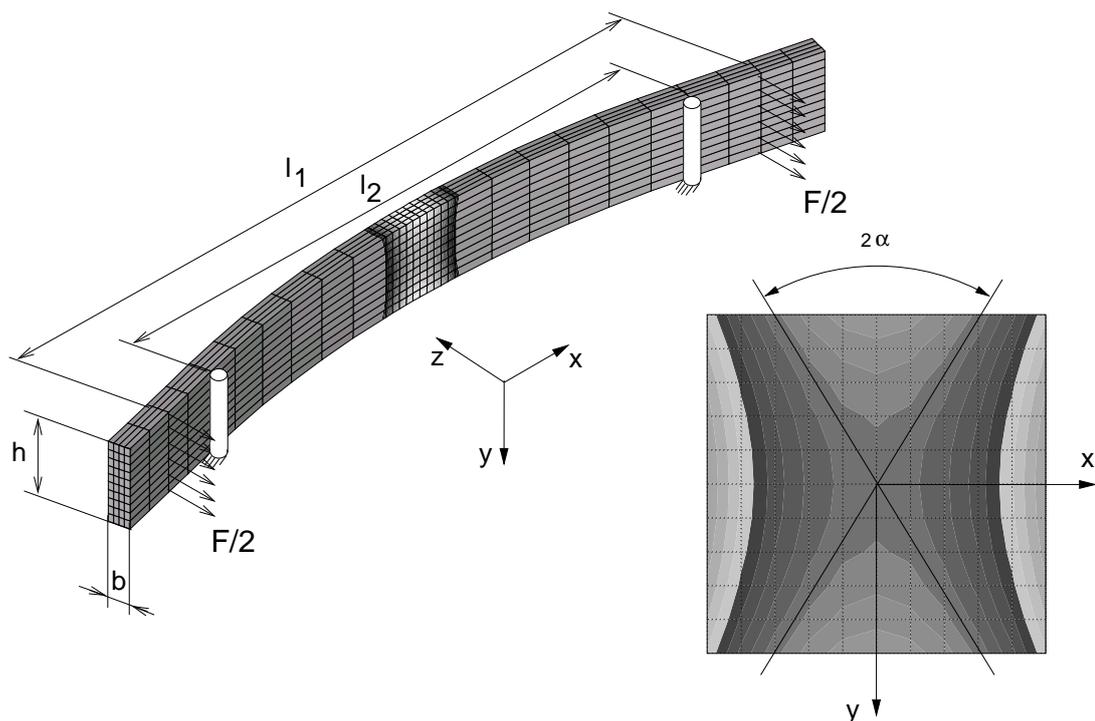


Abb. 5.10: Vier-Punkt-Biegeversuch an einem Plattenstreifen: Koordinaten, Abmessungen und berechnetes "out-of-plane"-Verschiebungsfeld

Wenn sowohl die geometrischen Abmessungen als auch die Belastungsrichtungen parallel zu den Hauptachsen des Werkstoffes liegen, läßt sich für den Lastfall reine Biegung eine analytische Lösung für die Komponenten u , v , und w der Verschiebung angeben [128].

$$u = +x z \frac{M}{E_x I}, \quad (5.25)$$

$$v = +\nu_{yx} y z \frac{M}{E_x I}, \quad (5.26)$$

$$w = -\frac{1}{2} (x^2 - \nu_{yx} y^2 + \nu_{zx} z^2) \frac{M}{E_x I}, \quad (5.27)$$

mit u, v, w Verschiebungskomponente in x-,y- bzw. z- Richtung,
 $M = \frac{F(l_1 - l_2)}{4}$ Biegemoment,
 $I = \frac{b^3 h}{12}$ Flächenträgheitsmoment.

Für die Höhenlinien der Verwölbung w an der Oberfläche des Plattenstreifens erhält man aus (5.27):

$$z = \text{const.}; w = \text{const.} \implies \nu_{yx} y^2 - x^2 = \text{const.} \quad (5.28)$$

Der Vergleich mit Abb. 5.10 liefert den Zusammenhang zwischen dem Winkel α und der Querdehnzahl ν_{yx} :

$$\nu_{yx} = \tan^2 \alpha. \quad (5.29)$$

Um diesen Effekt für die experimentelle Bestimmung von Querdehnzahlen zu nutzen, eignen sich optische Feldmeßverfahren. Abb. 5.11 zeigt einen Versuchsaufbau für den Einsatz der Hologramminterferometrie, mit deren Hilfe die Höhenlinien für kleine Verformungen auf rauhen Oberflächen sichtbar gemacht werden können [141]. Dabei wird der belastete Plattenstreifen mit dem kohärentem Licht eines Lasers beleuchtet und durch einen halbdurchlässigen Spiegel beobachtet.

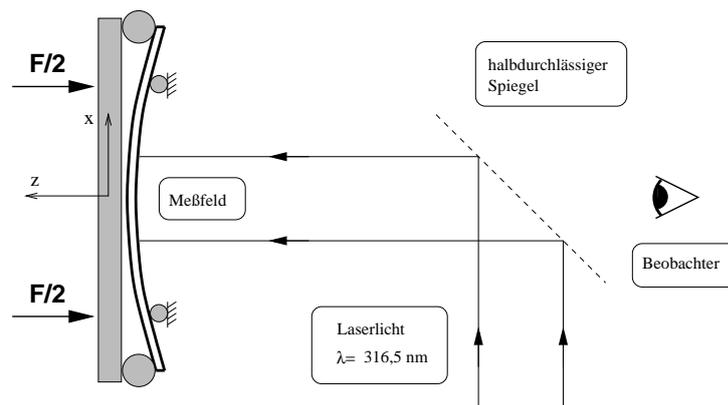


Abb. 5.11: Versuchsaufbau für Hologramminterferometrie

Zur Untersuchung bei statischen Belastungen eignet sich das Doppelbelichtungsverfahren. Dabei werden die für die Holografie notwendigen Mikrointerferenzmuster aus Objekt- und Referenzwelle von zwei verschiedenen Belastungszuständen auf einer Photoplatte oder, bei

Einsatz einer CCD-Kamera, elektronisch gespeichert. Bei der Rekonstruktion des Hologramms entstehen Makrointerferenzen, die Informationen über die Verschiebung zwischen den beiden Zuständen beinhalten. Beträgt die relative "out-of-plane"-Verschiebung (in z -Richtung) eines Punktes gerade ein Vielfaches der halben Wellenlänge $\lambda/2$ des verwendeten Lasers, so kommt es zur Auslöschung. Linien gleicher Verschiebung (Isotheten) werden als schwarze Streifen sichtbar (siehe Abb. 5.12). Anzahl und Form der Hyperbeln können mittels digitaler Bildverarbeitung ausgewertet werden und erlauben eine gute Identifikation der Querdehnzahlen. Vorteilhaft ist, daß bei diesem Meßverfahren weder die beteiligten Biegemomente noch die Absolutwerte der Durchbiegung bekannt sein müssen.

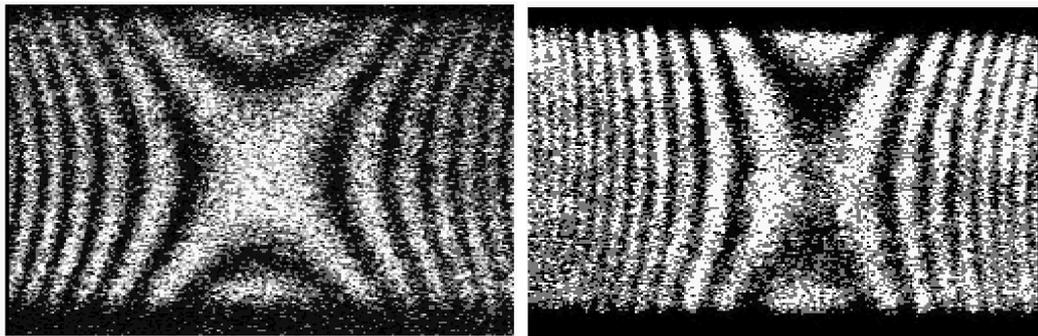


Abb. 5.12: Interferogramm für die Messung von ν_{TR} (links) und ν_{RT} (rechts)

Die in Abb. 5.12 dargestellten Interferogramme wurden im Rahmen eines DFG-Forschungsthemas [40] aufgenommen. Dazu wurden Proben aus Buchenholz (*Fagus sylvatica L.*), wie in Abb. 5.10 skizziert, einer Vier-Punkt-Biegung unterworfen.²

Die Abmessungen betragen etwa:

Abstand der Krafteinleitungsrollen:	$l_1 = 90mm$
Stützweite der Festlager:	$l_2 = 60mm$
Kraftdifferenz:	$\Delta F = 1 - 2N$
Probenlänge:	$L = 135mm$
Probenhöhe:	$h = 10mm$
Probenbreite:	$b = 5mm$
Größe des Meßfeldes:	$10 \times 10mm^2$

Bei der Probenherstellung muß besonders auf die Parallelität der Probenachsen zu den Hauptachsen des Holzes geachtet werden. Für die Bestimmung der Querdehnzahl ν_{TR} liegt beispielsweise die Probenlängsachse (x -Achse) parallel zur Radialrichtung, während die Biegung um die zur y -Achse parallele Tangentialrichtung erfolgt. Die Auswertung der Interferogramme aus Abb. 5.12 liefert die Isothetenwinkel $\alpha = 39.5^\circ$ bzw. $\alpha = 26.5^\circ$ und daraus mit (5.29) die Querdehnzahlen $\nu_{TR} = 0.680$ und $\nu_{RT} = 0.249$.

Die Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen zum Vergleich dazu *berechnete* Linien gleicher

²Die Messungen wurden von Frau Dr.-Ing. K. Thielsch am Institut für Festkörpermechanik durchgeführt.

Verschiebung. Die Rechnungen wurden mit ANSYS [118] durchgeführt, wobei aus Symmetriegründen nur ein Viertel des Meßfeldes diskretisiert wurde. Die Isolinien wurden so skaliert, daß sie einer Zunahme der Verschiebung um jeweils 316.5 nm entsprechen, was mit der halben Wellenlänge $\lambda/2$ des im Experiment verwendeten Lasers übereinstimmt. Durch geeignete Wahl der Lastgröße lassen sich für jede Meßrichtung annähernd gleich viele Isolinien erzeugen.

Die Abbildung 5.13 wurde mit Materialparametern für Rotbuche nach Tab. 17 berechnet und kann direkt mit den experimentell ermittelten Interferogrammen aus Abb. 5.12 verglichen werden.

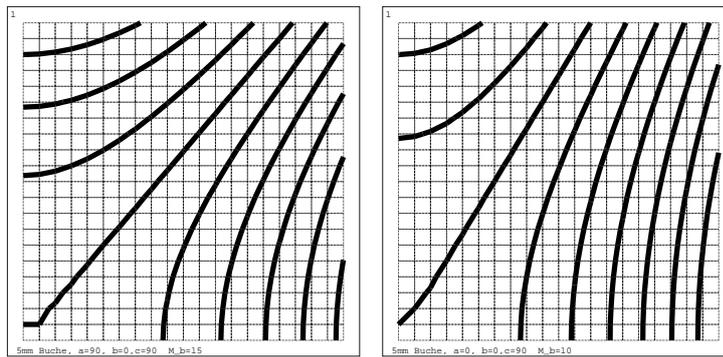


Abb. 5.13: Berechnete Interferogramme: ν_{TR} und ν_{RT}

Ergänzend zu den Messungen von ν_{TR} und ν_{RT} wurden auch die entsprechenden Interferogramme für ν_{RL} und ν_{LR} berechnet. Besonders in der Abb. 5.14 wird deutlich, daß Querdehnzahlen mit vertauschten Indizes (=vertauschter Belastungsrichtung) mit diesem Verfahren unterschiedlich gut zu messen sind. Im Fall der extrem kleinen Querdehnzahl ν_{LR} sind die Isolinien annähernd parallele Geraden, so daß sich eine Auswertung schwierig gestaltet.

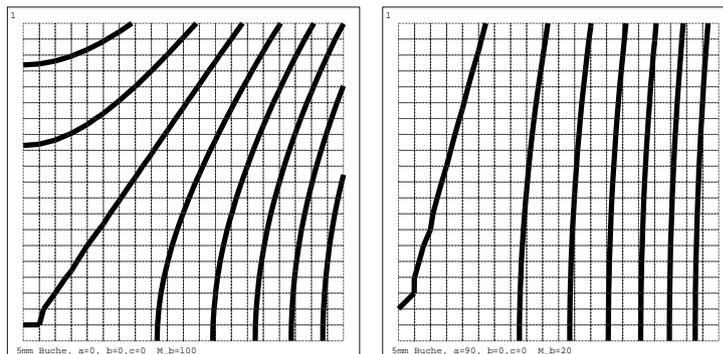


Abb. 5.14: Berechnete Interferogramme: ν_{RL} und ν_{LR}

Löst man Gleichung (5.29) nach α auf und setzt aus der Literatur bekannte Zahlenwerte für ν (nach Tab. 17) ein, so kann man die zu erwartenden Asymptotenwinkel für unterschiedliche Meßrichtungen und Holzarten abschätzen. Tab. 5 zeigt eine solche Zusammenstellung für Buche und Fichte.

Holzart	ν_{lr}	ν_{rl}	ν_{tr}	ν_{rt}	ν_{tl}	ν_{lt}
Rotbuche	15.1°	33.8°	40.1°	31.0°	35.7°	11.7°
Fichte	7.8°	33.5°	32.9°	26.1°	36.2°	6.6°

Tab. 5: Abschätzung der Isothetenwinkel α für die Bestimmung von Querdehnzahlen an Buche und Fichte

Die Abbildung 5.15 verdeutlicht, welcher Meßfehler sich aus Gleichung (5.29) für die Querdehnzahl ergibt, wenn man für den Winkel α eine Ablesegenauigkeit von $\Delta\alpha = 1^\circ$ annimmt. Es zeigt sich, daß der Fehler erst bei $\alpha > 25^\circ$ unter zehn Prozent sinkt, was etwa Querdehnzahlen $\nu > 0.2$ entspricht.

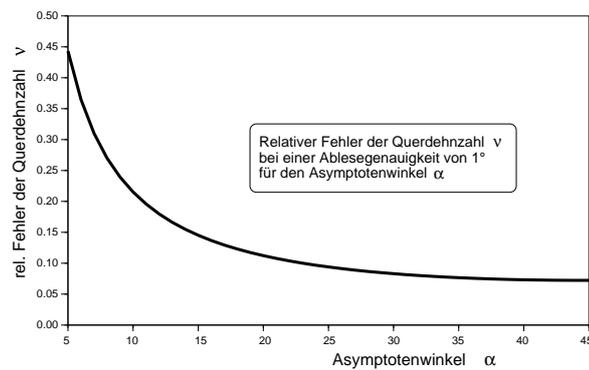


Abb. 5.15: Aus der Ablesegenauigkeit $\Delta\alpha$ resultierender Fehler der Querdehnzahl ν

Die Abbildung 5.16 zeigt, wie sich das Interferogramm verändert, wenn die Probengeometrie nicht mit den Hauptachsen der Orthotropie zusammenfällt. Schon bei einer Orientierungsabweichung von 5° tritt eine schiefe Biegung auf, die die Symmetrie bezüglich der x -Achse zerstört.

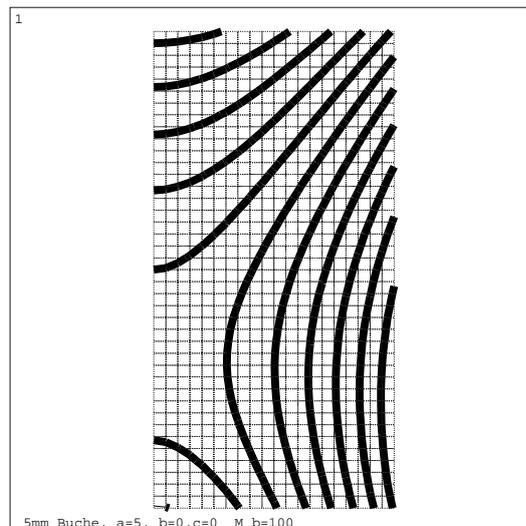


Abb. 5.16: Berechnetes Interferogramm für ν_{RL} , Orientierungsabweichung 5°

5.5 Identifikation von Schubmoduln aus Torsionsversuchen

Schubmoduln können durch Torsionsversuche an Rundstäben oder prismatischen Stäben ermittelt werden. Bei der schon von HÖRIG [51, 53] vorgeschlagenen $R(p)$ -Methode werden die Ergebnisse von jeweils drei Torsionsversuchen an unterschiedlich orientierten Rechteckstäben mit vorgeschriebenen Kantenlängen ausgewertet. Hier soll jedoch eine neue, abgewandelte Methode vorgestellt werden, die die Identifikation von jeweils zwei Schubmoduln aus zwei Torsionsversuchen mit identischer Torsionsachse ermöglicht. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt zum einen in einer möglichen Redundanz der Ergebnisse, die eine bessere Fehlerabschätzung erlaubt. Zum anderen kann aber auch auf die schwierige Herstellung von und Versuchsdurchführung an Tangentialproben verzichtet werden.

Die Verdrillung D_x eines Rechteckstabes mit den Abmessungen $b \times h \times l$ aufgrund eines Torsionsmomentes M_x um die x -Achse wird bestimmt durch die Schubmoduln G_{xy} und G_{xz} . Bei einer Meßlänge L ergibt sich der meßbare Verdrehwinkel $\vartheta_x = D_x L$.

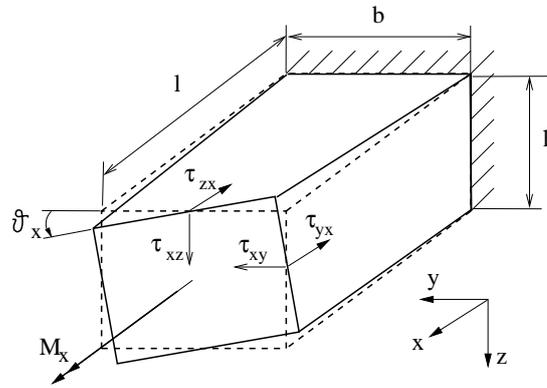


Abb. 5.17: Torsion eines prismatischen Stabes

Unter der Voraussetzung, daß ϑ ein kleiner Winkel ist, ergeben sich die Verschiebungen v und w in y bzw. z Richtung zu:

$$v(x, z) = -Dxz; \quad w(x, y) = Dxy. \quad (5.30)$$

Nach *Saint-Venant* [116] tritt außerdem noch eine Verschiebung u in x -Richtung auf:

$$u(y, z) = D\varphi(y, z) \quad (5.31)$$

Diese *Verwölbung* φ ist keine Funktion von x und somit für alle Querschnitte gleich. Wird die Verwölbung nicht behindert³, so treten keine Normalspannungen auf ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$). Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann:

$$\tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} = 0 \quad (5.32)$$

³Vergleichsrechnungen mit dem FE-Programm ANSYS zeigen, daß bei den üblichen Probenabmessungen die Wölbbehinderung an der festen Einspannung vernachlässigt werden kann.

sowie:

$$\tau_{xy,x} + \tau_{zy,z} = 0 \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0 \quad (5.33)$$

Die Deformationsgleichungen liefern unter Berücksichtigung von (5.30) und (5.31):

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G_{xy}(u_{,y} + v_{,x}) = G_{xy}D(\varphi_{,y} - z) \\ \tau_{xz} &= G_{xz}(u_{,z} + w_{,x}) = G_{xz}D(\varphi_{,z} + y) \\ \tau_{yz} &= G_{yz}(v_{,z} + w_{,y}) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (5.33) sind identisch erfüllt, während (5.32) eine Bedingung für die Verwölbung φ liefert:

$$\varphi_{,yy} + \varphi_{,zz} = \Delta\varphi = 0. \quad (5.35)$$

Da der resultierende Schubspannungsvektor die Oberfläche tangieren muß gilt als Randbedingung:

$$\tau_{xz}dy - \tau_{xy}dz = 0 \quad \text{für } y = \pm\frac{b}{2} \text{ und } z = \pm\frac{h}{2} \quad (5.36)$$

Im isotropen Fall ($G_{xy} = G_{xz} = G$) gelangt man zu einer Lösung durch die Einführung einer *Spannungsfunktion* Ψ :

$$\tau_{xy} = -2DG\Psi_{,z}, \quad \tau_{xz} = 2DG\Psi_{,y}. \quad (5.37)$$

Diese Lösung läßt sich jedoch nur in abgewandelter Form auf den anisotropen Fall übertragen. Zunächst muß eine Koordinatentransformation durchgeführt werden, die neben den geometrischen Abmessungen auch das Verhältnis der beiden unterschiedlichen Schubmoduln berücksichtigt.

$$y = \frac{b}{2}\eta; \quad z = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{G_{xz}}{G_{xy}}}\zeta. \quad (5.38)$$

Analog zu (5.37) wird dann eine neue Spannungsfunktion so definiert, daß gilt:

$$\tau_{xy} = -Db\sqrt{G_{xy}G_{xz}}\Psi_{,\zeta}; \quad \tau_{xz} = DbG_{xz}\Psi_{,\eta} \quad (5.39)$$

Durch Einsetzen von (5.39) in (5.34) erhält man:

$$\begin{aligned} -Db\sqrt{G_{xy}G_{xz}}\Psi_{,\zeta} &= G_{xy}D\left(\frac{2}{b}\varphi_{,\eta} - \frac{b}{2}\sqrt{\frac{G_{xz}}{G_{xy}}}\zeta\right) \\ DbG_{xz}\Psi_{,\eta} &= G_{xz}D\left(\frac{2}{b}\sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}}\varphi_{,\zeta} + \frac{b}{2}\eta\right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Differenzieren und Subtrahieren liefert:

$$\Psi_{,\eta\eta} + \Psi_{,\zeta\zeta} = 1 \quad (5.41)$$

Unter Berücksichtigung von (5.36) erhält man die Randbedingung:

$$\Psi = 0 \quad \text{für } \eta = \pm 1 \text{ und } \zeta = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \quad (5.42)$$

Gleichung (5.41) ist eine inhomogene *Poissonsche Differentialgleichung* für die Spannungsfunktion im Innern des tordierten Querschnittes. Die Lösung kann nach [126] in Form einer unendlichen Reihe beschrieben werden:

$$\Psi = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1) + 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\eta\right) \cosh\left(\frac{2n+1}{2}\pi\zeta\right)}{(2n+1)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right)} \quad (5.43)$$

Die Spannungsfunktion Ψ nach (5.43) erfüllt die Randbedingung (5.42) für $\eta = \pm 1$ exakt, für $\zeta = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xz}}{G_{xy}}}$ nur bei Mitnahme unendlich vieler Reihenglieder.

Einsetzen von (5.43) in (5.39) und Rücktransformation liefert die Schubspannungen:

$$\tau_{xy} = -8 \sqrt{G_{xy} G_{xz}} D b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left((2n+1)\pi \frac{y}{b}\right) \sinh\left((2n+1)\pi \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \frac{z}{b}\right)}{(2n+1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right)} \quad (5.44)$$

$$\tau_{xz} = 8 G_{xz} D \left(\frac{y}{4} - b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left((2n+1)\pi \frac{y}{b}\right) \cosh\left((2n+1)\pi \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \frac{z}{b}\right)}{(2n+1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right)} \right) \quad (5.45)$$

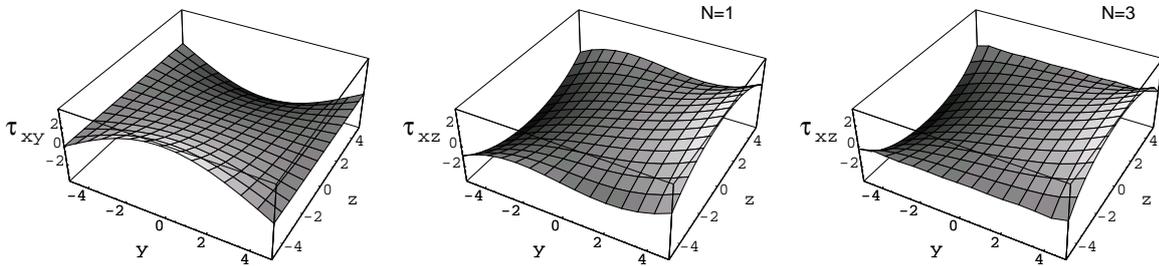


Abb. 5.18: Schubspannungsverteilung: τ_{xy} und τ_{xz} (mit 1 bzw. 3 Reihengliedern)

Abb. 5.18 veranschaulicht diese Schubspannungsverteilung. Es zeigt sich, daß schon bei Berücksichtigung von 3 Reihengliedern für τ_{xz} die Randbedingungen annähernd erfüllt werden.

Das Torsionsmoment M_x ergibt sich aus dem Flächenintegral

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_F (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dy dz \\
 &= D G_{xz} \left(\frac{b^3 h}{3} - \frac{64b^4}{\pi^5} \sqrt{\frac{G_{xz}}{G_{xy}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-5} \tanh\left(\frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} (2n+1) \frac{\pi}{2}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Gleichung (5.46) ermöglicht es, bei bekannter Geometrie h und b und bekannten Schubmoduln G_{xy} und G_{xz} das für eine vorgegebene Verdrillung D erforderliche Torsionsmoment M zu berechnen. Offensichtlich läßt sie sich nicht nach den Schubmoduln auflösen. Trotzdem ist es möglich, (5.46) zur Identifikation von Schubmoduln einzusetzen. Mißt man nämlich die Verdrillung zweier Stäbe mit rechteckigem Querschnitt, deren Torsionsachsen identisch sind, deren Rechteckseiten h und b jedoch gerade vertauscht sind, so erhält man zwei unterschiedliche Werte, aus denen sich die Schubmoduln eindeutig identifizieren lassen.

Seien D'_0 und D'_1 die gemessenen Verdrillungen zweier unterschiedlicher Rechteckquerschnitte bei gleichem Torsionsmoment M . Seien ferner $D_0(G_{xy}, G_{xz})$ und $D_1(G_{xy}, G_{xz})$ die nach (5.46) berechneten Verdrillungen. Die zu identifizierenden Schubmoduln minimieren dann ein Zielfunktional der Form:

$$Z(G_{xy}, G_{xz}) = \left(D'_0 - D_0(G_{xy}, G_{xz}) \right)^2 + \left(D'_1 - D_1(G_{xy}, G_{xz}) \right)^2 \tag{5.47}$$

Das Zielfunktional verhält sich ausgesprochen gutartig (siehe Abb. 5.19) und erlaubt die eindeutige Identifikation der Schubmoduln mit Hilfe von Standard-Optimierungsalgorithmen.

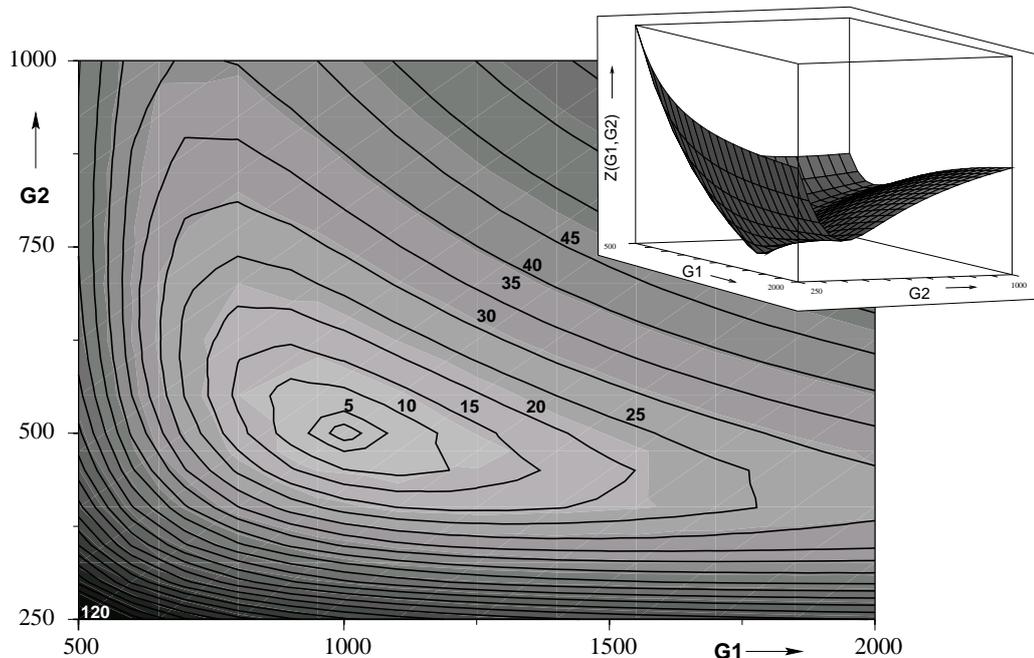


Abb. 5.19: Zielfunktionsgebirge für die Identifikation von Schubmoduln

Im Rahmen eines DFG-Forschungsthemas [40] wurden erste Versuche zu diesem Verfahren durchgeführt. Dazu wurde der in Abb. 5.20 dargestellte Versuchsaufbau eingesetzt.

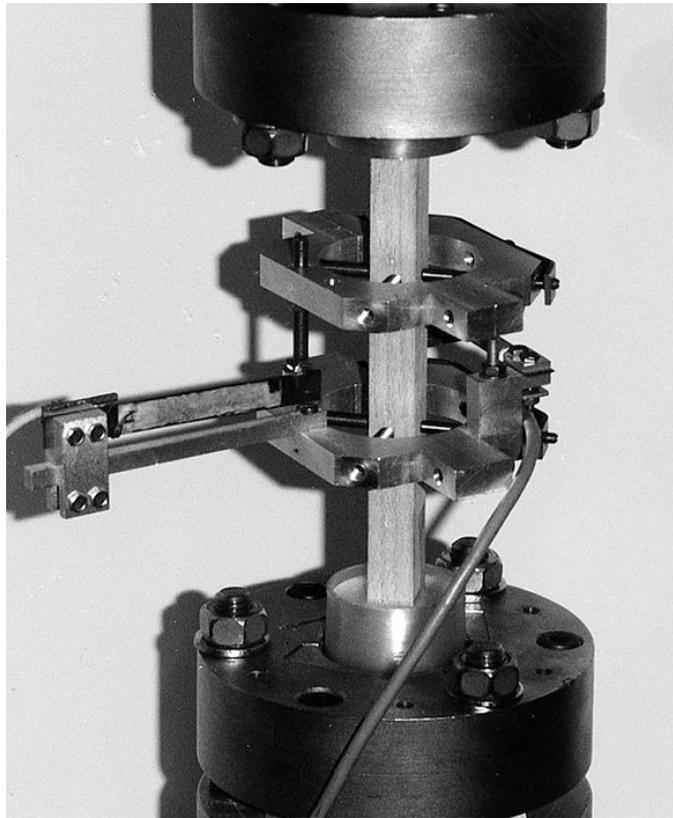


Abb. 5.20: ILK-Längen-Drillungs-Extensiometer mit prismatischem Holzprüfkörper

Erste Messungen führten zu den in Abb. 5.21 gezeigten Verläufen von Verdrehwinkel über Torsionsmoment.

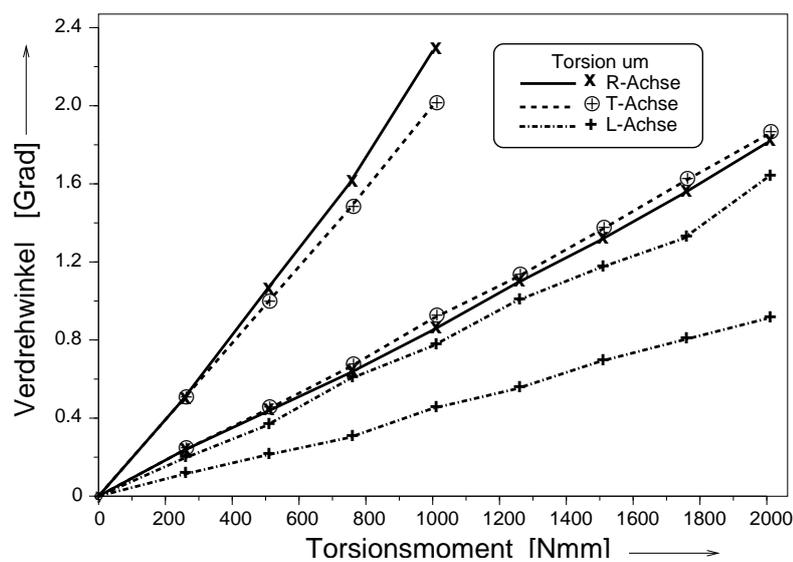


Abb. 5.21: Verdrehwinkel unterschiedlich orientierter Torsionsproben

Vernachlässigt man die Anisotropie der untersuchten Prüfkörper, so erhält man mit $G_{xy} = G_{xz} = \bar{G}$ aus (5.46) die in Abb. 5.22 wiedergegebenen "Verdrillungsmoduln" \bar{G} .

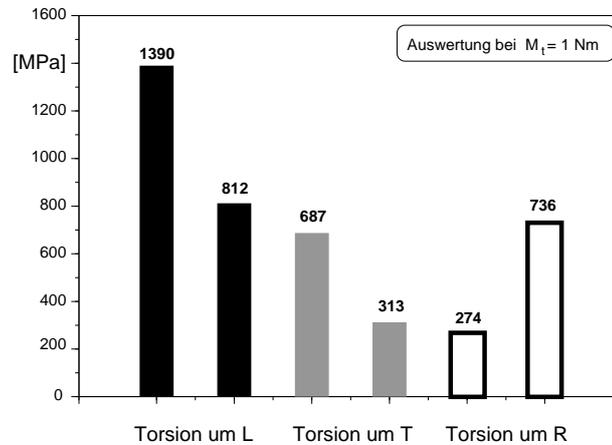


Abb. 5.22: Verdrillungsmodul der unterschiedlichen Torsionsprüfkörper

Bei Berücksichtigung der Anisotropie liefert (5.46) unter Einsatz des Optimierungsalgorithmus und der Zielfunktion (5.47) die gesuchten Schubmoduln. Das Ergebnis ist der Abb. 5.23 zu entnehmen.

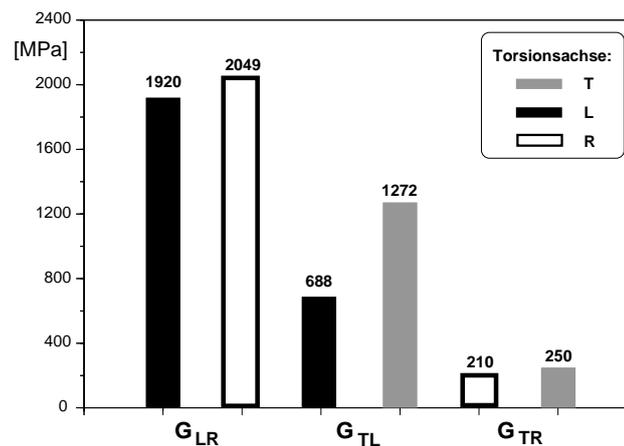


Abb. 5.23: Aus dem Torsionsversuch identifizierte Schubmoduln

In [40] wurden auch Messungen an Platten des gleichen Holzes mit der im Bereich der verstärkten Kunststoffe üblichen und genormten (DIN 53 399) Schubrahmenmethode durchgeführt. Im Vergleich der hier identifizierten Schubmoduln mit den mittels der Schubrahmenmethode gemessenen zeigte sich, daß

- eine gute Übereinstimmung der Moduln G_{TR} besteht,
- der Modul G_{LR} bei der Torsionsmethode als deutlich größer identifiziert wird,
- der Modul G_{TL} zwar im Mittel bei beiden Methoden gleich groß ausfällt, daß jedoch die Torsion um die L-Achse und die Torsion um die T-Achse zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Um diese neuentwickelte Methode abschließend zu bewerten, sind weitere Experimente erforderlich.

5.6 Identifikation von Parametern aus Modalanalysen

5.6.1 Theoretische Grundlagen

Die Kirchhoff'sche Plattentheorie liefert für kleine Schwingungen einer dünnen, isotropen Platte (siehe [68, 29, 126, 22]):

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{K} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5.48)$$

mit der Dichte ρ , der Plattendicke h und der Plattensteifigkeit $K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Ein Separationsansatz $w = W(x, y) \cos \omega t$ für die Durchbiegung in z -Richtung liefert für die Ortsfunktion $W(x, y)$ das Eigenwertproblem

$$\nabla^4 W = k^4 W. \quad (5.49)$$

mit dem Eigenwert : $k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{K}$.

Im anisotropen Fall ist die Plattensteifigkeit richtungsabhängig. Als Werkstoffgesetz gilt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Aus (5.48) wird:

$$K_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4K_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4K_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + K_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5.51)$$

Dabei ist $K_{ij} = a_{ij} \frac{h^3}{12}$ und a_{ij} die Adjunkte des Elementes s_{ij} aus Gleichung (5.50).

Im orthotropen Fall und wenn die Orthotropieachsen mit der Plattenebene zusammenfallen gilt $s_{16} = s_{26} = 0$ und damit auch $a_{16} = a_{26} = 0$.

Gleichung (5.51) vereinfacht sich dann zu:

$$K_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (5.52)$$

mit

$$K_{11} = \frac{h^3}{12} \frac{s_{22}}{(s_{11}s_{22} - s_{12}^2)} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})},$$

$$K_{12} = \frac{h^3}{12} \frac{-s_{12}}{(s_{11}s_{22} - s_{12}^2)} = \frac{\sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}} E_x E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})},$$

$$K_{22} = \frac{h^3}{12} \frac{s_{11}}{(s_{11}s_{22} - s_{12}^2)} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})},$$

$$K_{66} = \frac{h^3}{12} \frac{1}{s_{66}} = \frac{G_{xy} h^3}{12}.$$

Näherungslösungen dieser Differentialgleichung nach dem *Rayleigh-Ritz*'schen Verfahren [113, 114] für beliebige Randbedingungen sind z.B. bei [30] tabellarisch zusammengestellt. Im Falle einer rechteckigen Platte ergeben sich Eigenschwingungen, deren Knotenlinien parallel zu den Seiten verlaufen. Deshalb ist es üblich, die Schwingungsformen mit $[m, n]$ zu bezeichnen, wobei m die Anzahl der Knotenlinien parallel zur y -Achse und n diejenige parallel zur x -Achse angibt.

Die zugehörigen Eigenfrequenzen f_{mn} ergeben sich nach [30] zu:

$$f_{mn} = \frac{\omega}{2\pi},$$

$$\omega^2 = \frac{\kappa^4 \pi^4}{\rho h a^4}, \quad (5.53)$$

$$\kappa^4 = K_{11} \mathfrak{G}_m^4 + K_{22} \mathfrak{G}_n^4 \frac{a^4}{b^4} + 2 \frac{a^2}{b^2} (K_{12} \mathfrak{H}_m \mathfrak{H}_n + 2K_{66} \mathfrak{J}_m \mathfrak{J}_n).$$

i	\mathfrak{G}_i	\mathfrak{H}_i	\mathfrak{J}_i
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1.506	1.248	5.017
3, 4, ...	$(i - \frac{1}{2})$	$(i - \frac{1}{2})^2 \left(1 - \frac{2}{(i - \frac{1}{2})\pi}\right)$	$(i - \frac{1}{2})^2 \left(1 - \frac{6}{(i - \frac{1}{2})\pi}\right)$

Tab. 6: Koeffizienten für die Berechnung der Eigenfrequenzen

Durch Einsetzen von (5.52) in (5.53) und unter Berücksichtigung von Tab. 6 erhält man:

$$f_{11}^2 = \frac{12 h^2}{\rho a^2 b^2 \pi^2} G_{xy} \quad (5.54)$$

$$f_{20}^2 = 0.107 \frac{h^2 \pi^2}{\rho a^4} \frac{E_x}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (5.55)$$

$$f_{02}^2 = 0.107 \frac{h^2 \pi^2}{\rho b^4} \frac{E_y}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (5.56)$$

Bei isotropen quadratischen Platten ergeben sich aus (5.55) und (5.56) gleiche Frequenzen für die Eigenformen $[0,2]$ und $[2,0]$ und es tritt eine Modenüberlagerung auf. Je nachdem ob diese Überlagerung gleichphasig oder gegenphasig erfolgt, ergeben sich zwei neue Eigenformen: $[2,0 + 0,2]$ oder O-Mode und $[2,0 - 0,2]$ oder X-Mode. Die Entstehung dieser beiden Moden ist in Abb. 5.24 grafisch veranschaulicht. Aufgrund der Poisson-Kopplung

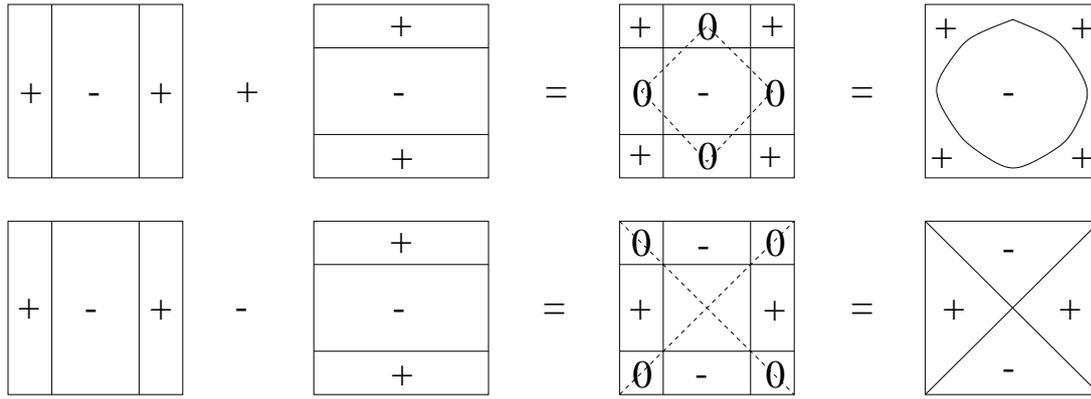


Abb. 5.24: Mode-Splitting durch Poisson-Kopplung

tritt ein Mode-Splitting auf, wodurch die Frequenz der O-Mode erhöht und die der X-Mode erniedrigt wird. Auch bei höheren Eigenformen kommt es zu Mode-Splitting, wenn gilt: $m - n = \pm 2, 4, 6, \dots$. Nach [139] beträgt das Frequenzverhältnis:

$$\frac{f_O}{f_X} = \sqrt{\frac{1 + 0.7205\nu}{1 - 0.7205\nu}} \quad (5.57)$$

Bei anisotropen Rechteckplatten tritt Mode-Splitting auf, wenn das Verhältnis der Seitenlängen dem der Plattensteifigkeiten entspricht:

$$\frac{a}{b} = 4 \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \quad (5.58)$$

Das zugehörige Frequenzverhältnis ergibt sich aus (5.57) mit $\nu = \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}$ und daraus:

$$\sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}} = 1.388 \frac{f_O^2 - f_X^2}{f_O^2 + f_X^2}. \quad (5.59)$$

5.6.2 Experimente aus der Literatur

Aus der Literatur [134] wurde ein Beispiel übernommen, bei dem im Rahmen einer experimentellen Modalanalyse die ersten drei Eigenfrequenzen einer dünnen Fichtenholzplatte mit den Abmessungen $220.2 \times 111.0 \times 8.35 \text{ mm}^3$ ermittelt wurden. Die zugehörigen Eigenformen wurden mit Hilfe der Hologramm-Interferometrie sichtbar gemacht. Sie entsprechen den in Bild 5.25 dargestellten und mit dem FE-Programm ANSYS berechneten Eigenformen [1,1], [0,2] und [2,0]. Aus den Frequenzen der Biegeschwingungen [0,2] und [2,0] wurden anhand eines *Rayleigh-Ritz*-Ansatzes entsprechend (5.55) und (5.56) die Elastizitätsmoduln E_L und E_R abgeschätzt und die Platte auf ein neues Seitenverhältnis $(E_L/E_R)^{1/4}$ wie in 5.58 zugeschnitten. Dadurch ergaben sich neue Eigenfrequenzen mit den zugehörigen Eigenformen [X] und [O].

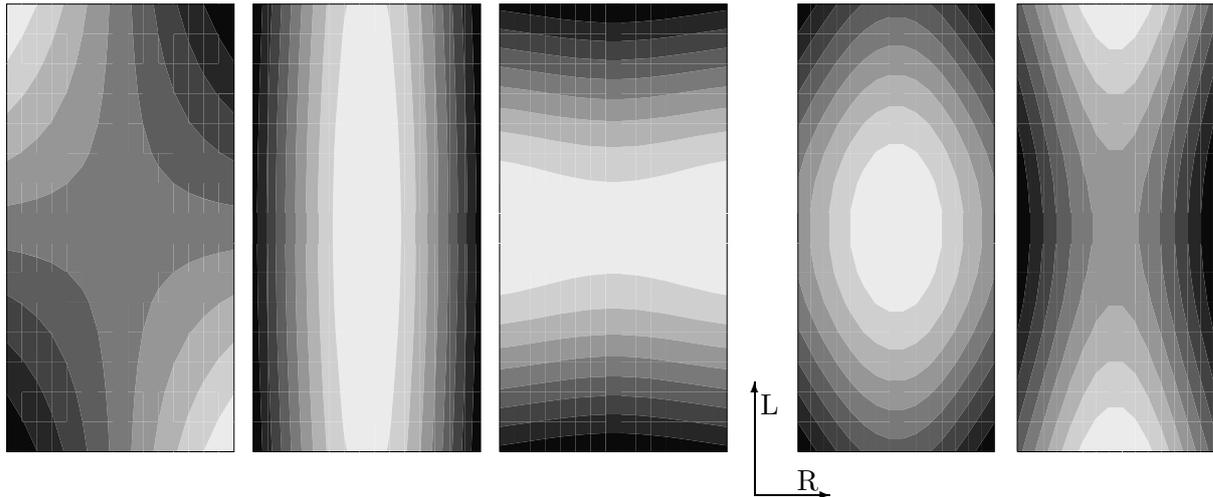


Abb. 5.25: Eigenformen einer Fichtenholzplatte bei veränderten Seitenverhältnissen

Dieses Experiment wurde mit Hilfe des Programmsystems ANSYS nachgerechnet⁴. Im Rahmen einer Empfindlichkeitsanalyse wurde ermittelt, wie stark sich die einzelnen Eigenfrequenzen bei einer Variation der Werkstoffparameter E_L , E_R , G_{LR} und ν_{LR} ändern und es konnten die in Tabelle 7 zusammengestellten Parameter identifiziert werden. Dabei wurde eine homogene Platte mit konstanter Dichte angenommen.

	Anfangswerte	Empfindlichkeit (Frequenzänderung in %)					Angepaßte Parameter
		[1,1]	[0,2]	[2,0]	[X]	[O]	
E_L	9878 MPa	0.5	0.3	47.0	15.5	31.4	10 410 MPa
E_R	355 MPa	1.0	43.2	0.0	15.1	26.3	417 MPa
G_{LR}	442 MPa	40.7	0.0	0.0	0.0	0.1	562 MPa
$\nu_{LR}(\nu_{RL})$	0.027 (0.738)	0.0	-0.4	-1.2	-2.9	-3.7	0.030 (0.749)

Tab. 7: Empfindlichkeiten und identifizierte Elastizitätszahlen bei konstant angenommener Dichte

Bei der im Experiment verwendeten Platte war hingegen ein Dichtegradient in radialer Richtung festgestellt worden. Die Dichteabhängigkeit des Elastizitätsmoduls E_L war anhand der Biegeschwingungen schmaler Streifen einer zweiten Platte bestimmt worden, die aus dem selben Stamm wie die für die Modalanalyse verwendete Platte stammte. In einem neuen Rechengang wurden deshalb sowohl der Dichtegradient als auch die experimentell bestimmte Dichteabhängigkeit des Elastizitätsmoduls E_L berücksichtigt. Auch für E_R wurde eine lineare Abhängigkeit von der Dichte angenommen. In Übereinstimmung mit der Literatur [71, 101] wurden der Schubmodul G_{LR} und die Querdehnzahl ν_{LR} als konstant angesehen. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in den Tabellen 8 und 9 zusammengestellt.

⁴Dazu wurden 15×15 ebene Schalenelemente vom Typ „shell43“ verwendet.

ρ	340	...	375	...	410	kg/m ³
E_L	7213	...	10304	...	13395	MPa
E_R	293	...	419	...	545	MPa
G_{LR}	552					MPa
ν_{LR}	0.04					

Tab. 8: Dichtegradient und linear dichteabhängige Elastizitätszahlen

	[1,1]	[0,2]	[2,0]	[X]	[O]
gemessen	409	685	918	874	967
berechnet	408	688	920	848	966

Tab. 9: Vergleich der gemessenen und der berechneten Eigenfrequenzen (in Hz)

Im Gegensatz zur ersten Rechnung mit konstanter Dichte und konstanten Elastizitätszahlen konnte keine exakte Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Eigenfrequenzen erzielt werden. Abweichungen ergaben sich insbesondere für die [X]- und [O]-Mode der kleineren Platte, deren Frequenzverhältnis hauptsächlich durch die Querdehnzahl ν_{LR} bestimmt wird. Bei den in Bild 5.25 dargestellten, berechneten Eigenformen äußert sich die jeweils von links nach rechts abnehmende Dichte in unsymmetrischen Knotenlinien, was gut mit den Ergebnissen der Hologramm-Interferometrie übereinstimmt.

Der Vorteil der Modalanalyse einer dünnen Platte gegenüber „klassischen“ Zug- oder Biegeproben liegt in der Möglichkeit, gleichzeitig drei Elastizitätszahlen (zwei E-Moduln und einen Schubmodul) an einer einzigen Probe zu identifizieren. Außerdem können Eigenfrequenzen relativ einfach und genau gemessen werden.

Allerdings ist auch bekannt, daß aus dynamischen Versuchen bestimmte Parameter im allgemeinen etwas steifer ausfallen als die statisch gemessenen. Der Grund dafür ist wahrscheinlich in kurzzeitigen Kriechvorgängen zu suchen, die im statischen Versuch zu einer größeren Nachgiebigkeit führen.

Das systematische Vorgehen für die Identifikation von Parametern mit Hilfe von FE-Rechnungen wird im folgenden aufgezeigt.

- FE-Rechnung mit Start-Parametervektor p_i^0 ;
- Berechnung der Empfindlichkeiten

$$\Phi_{ij} = \frac{\Delta\omega_i}{\Delta p_j} \quad (5.60)$$

und des Fehlervektors

$$f_i = \bar{\omega}_i - \omega_i; \quad (5.61)$$

- Minimierung des Zielfunktional:

$$\sum_i (f_i - \Phi_{ij} \Delta p_j)^2 \rightarrow \min, \quad (5.62)$$

(Sonderfall: Matrix Φ_{ij} quadratisch ($i = j$) $\Rightarrow \Delta p_j = \Phi_{ji}^{-1} f_i$);

- Neue Rechnung mit verbessertem Parametervektor

$$p_i^1 = p_i^0 + \Delta p_i. \quad (5.63)$$

Dieses Vorgehen soll am Beispiel eines ebenfalls aus der Literatur übernommenen Experimentes verdeutlicht werden. In [133] wurden die ersten acht Eigenfrequenzen einer Fichtenholzplatte mit den Abmessungen (169 x 110 x 10 mm³), Dichte $\rho = 384 \text{ kg/m}^3$, im Bereich von 600 bis 3000 Hz bestimmt. Bei der numerischen Auswertung konnten mit Hilfe einer LS-Minimierung nach wenigen Iterationsschritten sechs verschiedene Elastizitätszahlen identifiziert werden. Dabei ergaben sich Frequenzabweichungen zwischen Experiment und Rechnung in der Größenordnung von einem halben Prozent. Berücksichtigt man für die Identifikation nur sechs der acht gemessenen Eigenfrequenzen, so läßt sich die Empfindlichkeitsmatrix invertieren. Die verbleibenden Frequenzen können danach zur Kontrolle verwendet werden. Die Ergebnisse wurden in Tabelle 10 gegenübergestellt.

Identifizierte Materialparameter						
Parameter	E_L	E_R	G_{LR}	G_{TR}	G_{TL}	ν_{LR}
Least Squares	11264 MPa	644 MPa	562 MPa	41 MPa	1397 MPa	0.027
Invertierung	11309 MPa	635 MPa	557 MPa	44 MPa	1254 MPa	0.020

Verbleibende Frequenzabweichung								
Eigenform	[1,1]	[0,2]	[1,2]	[2,0]	[2,1]	[0,3]	[1,3]	[2,2]
Least Squares	0.17 %	0.18 %	-0.43 %	0.24 %	-0.31 %	-0.33 %	0.53 %	-0.05 %
Invertierung	–	–	-0.56 %	–	–	–	1.10 %	–

Tab. 10: Identifizierte Materialparameter und verbleibende Frequenzabweichungen

In Abb. 5.26 ist die zugehörige Sensitivitätsmatrix nach (5.60) dargestellt. Besonders große Empfindlichkeiten ergeben sich bei den Eigenformen [1,1], [0,2] und [2,0] für die Parameter G_{LR} , E_R und E_L , die sich deshalb unabhängig vom gewählten Optimierungsverfahren relativ genau identifizieren lassen. Sowohl die einzelnen Parameterempfindlichkeiten als auch der Abstand der untersuchten Eigenfrequenzen lassen sich durch eine geschickte Wahl der Plattengeometrie günstig beeinflussen.

	E_L	E_R	G_{LR}	G_{TR}	G_{TL}	ν_{LR}						
[1,1]			■	■	■	■	0	0	42.3	4.7	0	0
[0,2]		■		■	■	■	0	43.4	0	6.9	0	0
[1,2]	■	■	■	■	■	■	0.6	14.9	25.2	9.1	0.6	0.6
[2,0]	■	■					48.6	-0.5	0	0	1.6	1
[2,1]	■	■	■	■	■	■	31.2	3.7	8.7	4.6	1.4	-0.9
[0,3]	■	■	■	■			4.6	26.2	0.8	18.2	0	1.7
[1,3]	■	■	■	■	■	■	0.4	17.7	13	18.4	0.7	0.4
[2,2]	■	■	■	■	■	■	18.6	2	18.3	9.1	2	0.7

Abb. 5.26: Sensitivitätsmatrix für acht Eigenfrequenzen

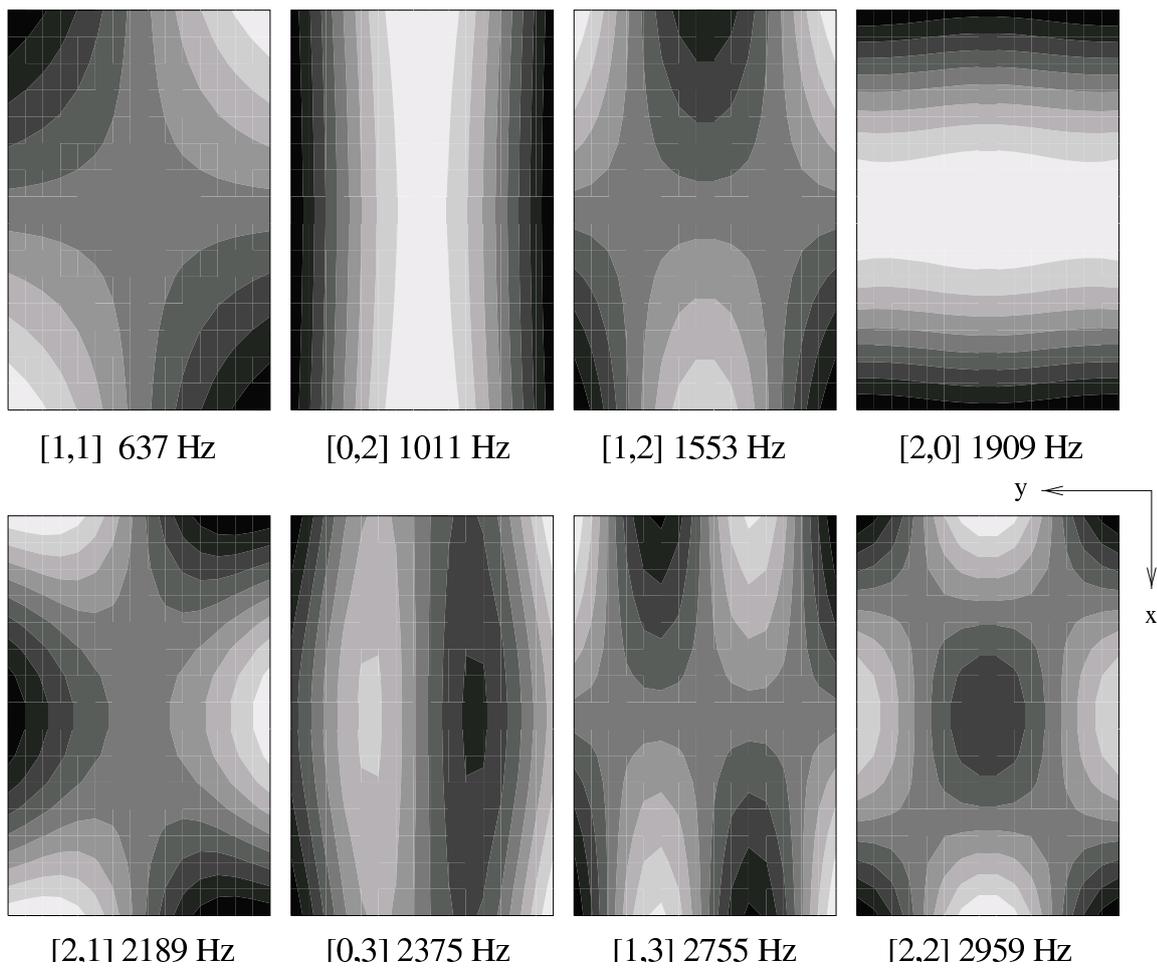


Abb. 5.27: Die ersten acht Eigenformen einer Fichtenholzplatte

5.6.3 Eigenes Experiment

Im Rahmen eines eigenen Experimentes wurde die in Abb. 5.28 dargestellte Buchenholzplatte mit den Abmessungen $(a \times b \times h) = (200 \times 98 \times 4) \text{ mm}^3$ untersucht. Die Dichte betrug $\rho = 720 \text{ kg/m}^3$. Die Orientierung dieser Platte stimmte nicht mit den Orthotropieachsen des Werkstoffes überein, sondern es ergab sich zwischen der x-y-Ebene der Platte und der L-R-Ebene des Holzes ein Winkel von $\alpha \approx 45^\circ$.

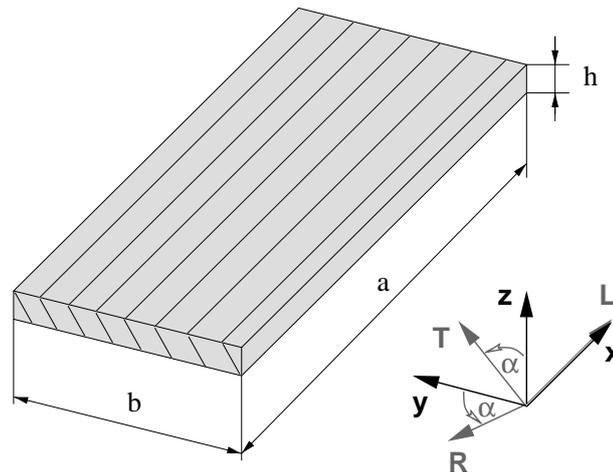


Abb. 5.28: Orthotropieachsen der untersuchten Buchenholzplatte

Mit Hilfe einer experimentellen Modalanalyse⁵ wurden die ersten zwölf Eigenschwingungen bestimmt. Die Identifikation der Materialparameter erfolgte unter Benutzung des FE-Programmes ANSYS sowie des freien Programmpaketes SCILAB für numerischen Mathematik. Um die Orientierungsabweichung berücksichtigen zu können, wurden für die FE-Modellierung in diesem Fall 10×6 dreidimensionale 20-Knoten-Elemente vom Typ "solid95" verwendet.

Der schematische Ablauf der Parameteridentifikation ist in Abb. 5.29 dargestellt. Zunächst werden Startwerte für die neun unabhängigen Elastizitätsparameter von Buchenholz aus der Literatur (nach Tab. 17) vorgegeben. Mit diesem Parametersatz wird eine rechnerische Modalanalyse mit ANSYS durchgeführt. Als Ergebnis erhält man Eigenfrequenzen und Eigenformen, die mit dem Ergebnis der experimentellen Modalanalyse verglichen werden können. Wichtig ist dabei die richtige Zuordnung der Eigenfrequenzen zu den Eigenformen.

Durch eine systematische Variation der Parameter (um jeweils 1 Prozent) und Abspeichern der sich ergebenden Frequenzänderungen in einer Datei läßt sich die Sensitivitätsmatrix Φ berechnen. Diese Matrix wird in SCILAB eingelesen und von dort aus grafisch angezeigt. Da die Sensitivität der einzelnen Parameter sehr unterschiedlich ist, erfolgt die eigentliche Identifikation in mehreren Stufen. Im interaktiven Dialog wird sowohl die Anzahl der Spalten der Sensitivitätsmatrix (gesuchte Parameter) als auch die der Zeilen (für

⁵Die Modalanalyse wurde freundlicherweise durchgeführt von Dr.-Ing J.Gier und Dipl.-Ing. H.-J.Beer.

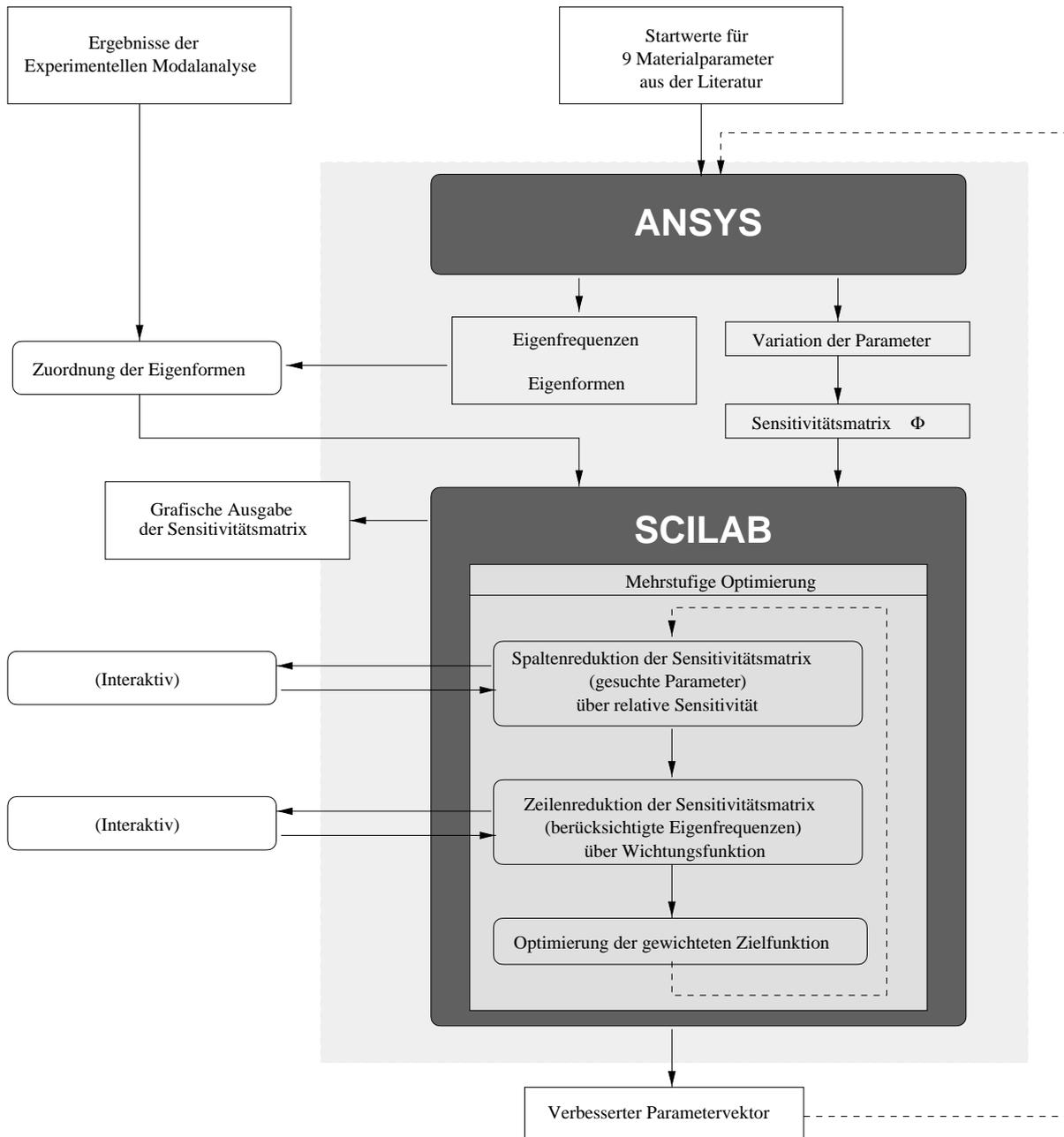


Abb. 5.29: Identifikationsschema

die Identifikation berücksichtigte Eigenfrequenzen) reduziert. Mit Hilfe der in SCILAB verfügbaren Algorithmen wird ein gewichtetes Zielfunktional optimiert, das die quadratischen Abweichungen zwischen experimentell und rechnerisch ermittelten Eigenfrequenzen beschreibt. Die jeweils optimierten Parameter werden fixiert und die stufenweise Optimierung wird sooft wiederholt, bis alle Komponenten des verbesserten Parametervektors gefunden sind.

Da es sich um ein nichtlineares Problem handelt, muß der so ermittelte Parametersatz wiederholt als neuer Startvektor in die FE-Rechnung eingegeben werden, um eine neue Sensitivitätsmatrix am "aktuellen Arbeitspunkt" zu berechnen. Um ein Überschwingen

zu vermeiden, empfiehlt sich die Einführung einer Dämpfung, indem nur ein Teil (etwa die Hälfte) der ermittelten Parameteränderung für die nächste Rechnung berücksichtigt wird.

In Abb. 5.30 ist die Sensitivitätsmatrix für die rechnerische Modalanalyse mit 3D-Elementen dargestellt. Für die erste Optimierungsstufe wurden nur die Parameter berücksichtigt, deren relative Sensitivität bezogen auf die größte insgesamt auftretende Sensitivität über 40% betrug. Hierbei handelte es sich um den Elastizitätsmodul E_L sowie um die beiden Schubmoduln G_{TR} und G_{TL} . In der zweiten Stufe wurden der Elastizitätsmodul E_R , der Schubmodul G_{LR} und die Querdehnzahl ν_{TR} optimiert, deren relative Sensitivität bezogen auf die größte bei den verbleibenden Parametern auftretende Sensitivität über 20% lag. Die verbleibenden Parameter E_T , ν_{LR} und ν_{TL} wurden zwar in einer dritten Stufe ebenfalls angepaßt, aber aufgrund der sehr geringen Sensitivität ist keine verlässliche Identifikation dieser Werte möglich.

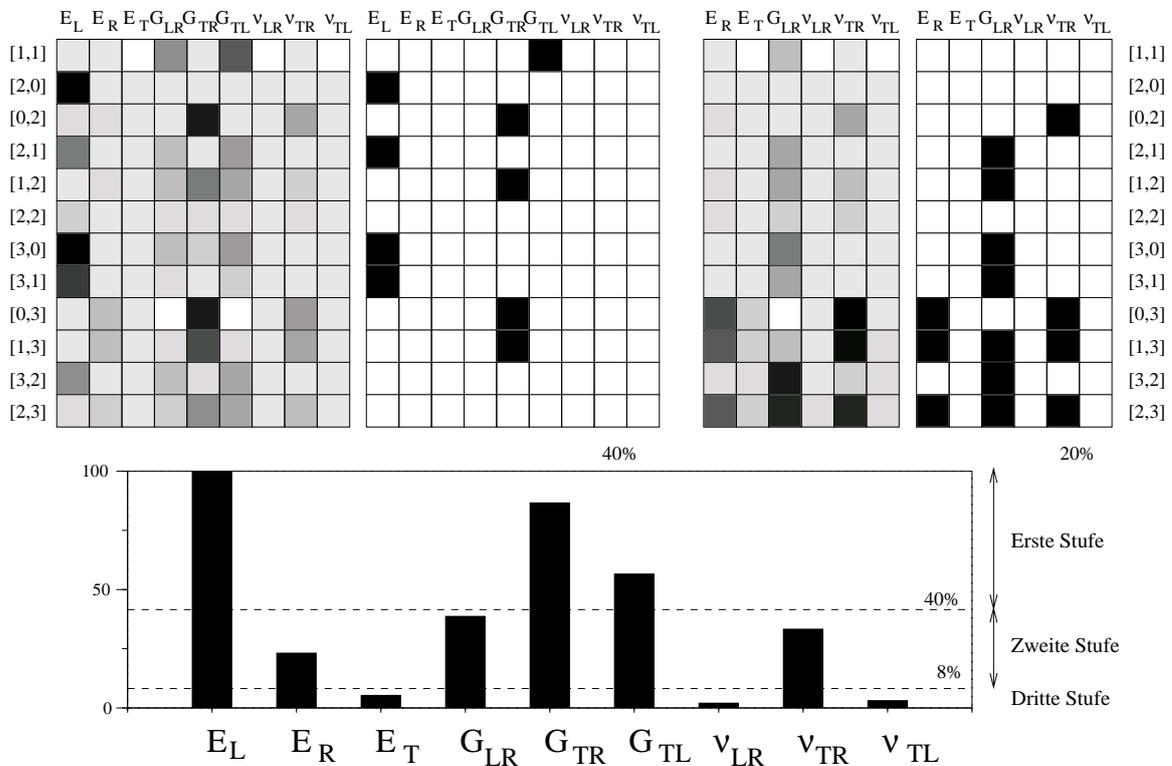


Abb. 5.30: Parametersensitivitäten bei der rechnerischen Modalanalyse mit 3D-Elementen

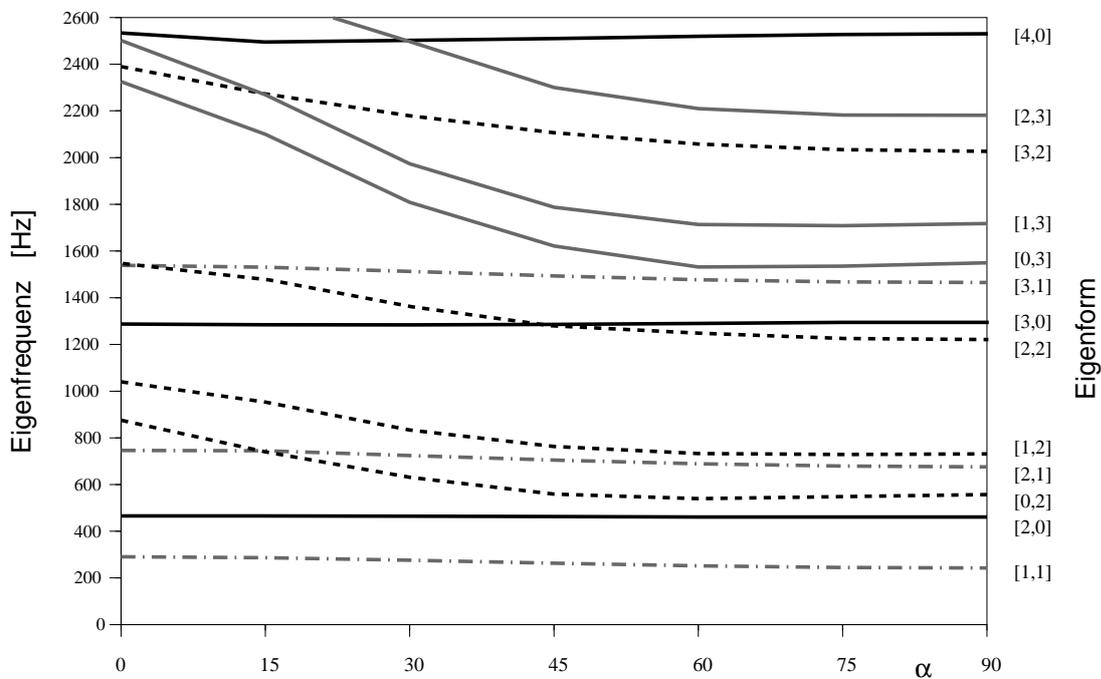
Nach mehreren Iterationsschritten konnte die in Tab. 11 dokumentierte gute Übereinstimmung zwischen experimentell und rechnerisch ermittelten Eigenfrequenzen erreicht werden. Der maximale relative Fehler lag bei $\sim 5\%$.

Um einen Überblick über den Einfluß des Winkels α (Abweichung zwischen Plattenebene und Orthotropieebene) zu gewinnen, wurde die rechnerische Modalanalyse mit dem gefundenen Parametersatz für unterschiedliche Winkel α durchgeführt. Das Ergebnis ist der Abb. 5.31 zu entnehmen. Es zeigt sich, daß die zu der Eigenform [1,1] und zu den Eigenformen mit Null Knotenlinien parallel zur x-Richtung gehörenden Eigenfrequenzen kaum

Mode	gemessen	berechnet	rel. Fehler
[1,1]	277	263	-5.1 %
[2,0]	477	464	-2.8 %
[0,2]	582	558	-4.2 %
[2,1]	691	704	1.9 %
[1,2]	782	763	-2.5 %
[2,2]	1237	1287	4.1 %
[3,0]	1308	1288	-1.5 %
[3,1]	1479	1495	1.1 %
[0,3]	1618	1598	-1.2 %
[1,3]	1740	1784	2.6 %
[3,2]	2080	2108	1.3 %
[2,3]	2269	2298	1.3 %

Tab. 11: Gemessene und berechnete Eigenfrequenzen, 3D-Elemente

von einer Winkeländerung $\Delta\alpha$ beeinflusst werden. Dieser Einfluß steigt jedoch mit wachsender Anzahl von Knotenlinien in y-Richtung. Die Reihenfolge der Eigenformen ändert sich zwischen $\alpha=0^\circ$ und $\alpha=90^\circ$. In der Nähe von $\alpha \approx 45^\circ$ fallen gerade die Eigenformen [2,2] und [3,0] zusammen. Dieses Ergebnis deutete sich schon bei der experimentellen Modalanalyse an, wo diese beiden Eigenformen nicht eindeutig identifiziert werden konnten. Bei ersten Vorversuchen wurde teilweise auch nur jeweils eine von beiden gefunden.

Abb. 5.31: Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom Verdrehwinkel α

Um die ermittelten Materialparameter zu überprüfen und die rechnerische Modalanalyse auch mit zweidimensionalen Schalen-Elementen durchführen zu können, wurde eine Koordinatentransformation nach Gleichung (5.11)-(5.13) durchgeführt. Die sich daraus ergebenden Parameter sind nun keine Materialparameter mehr, sondern müssen als Bauteilparameter aufgefaßt werden. Dieses wird in den geänderten Indizes (x, y, z statt T, L, R) berücksichtigt.

E_T	1160	MPa
E_L	14895	MPa
E_R	2993	MPa
G_{LR}	1334	MPa
G_{TR}	321	MPa
G_{TL}	928	MPa
ν_{LR}	0.058	
ν_{RT}	0.503	
ν_{LT}	0.041	

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 862 & -35.3 & -434 & 0 & 0 & 0 \\ -35.3 & 67.1 & -19.4 & 0 & 0 & 0 \\ -434 & -19.4 & 334 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 749 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1080 \end{bmatrix} \text{Pa}^{-1}$$

E_z	1160	MPa
E_x	14903	MPa
E_y	1160	MPa
G_{xy}	1093	MPa
G_{yz}	484	MPa
G_{xz}	1093	MPa
ν_{xy}	0.0317	
ν_{yz}	0.810	
ν_{xz}	0.0317	

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 862 & -27.4 & -698 & 0 & -264 & 0 \\ -27.4 & 67.1 & -27.4 & 0 & 15.9 & 0 \\ -698 & -27.4 & 862 & 0 & -264 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 915 & 0 & -166 \\ -264 & 15.9 & -264 & 0 & 2064 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -166 & 0 & 915 \end{bmatrix} \text{Pa}^{-1} \rightarrow$$

Abb. 5.32: Umrechnung der ermittelten Materialparameter auf Bauteilparameter

Aus dem transformierten Parametersatz wurden zunächst die Eigenfrequenzen nach dem *Rayleigh-Ritz*'schen Verfahren (5.53) berechnet. Dabei ergab sich eine Vertauschung der Reihenfolge von Eigenform [3,0] und [2,2]. Durch eine anschließende Parameteroptimierung konnte die Vertauschung behoben werden und es konnte für die ersten zehn Eigenfrequenzen eine Übereinstimmung mit rel. Abweichungen von unter 7% erzielt werden. Für höhere Eigenfrequenzen ergaben sich jedoch Fehler über 20%. Der Vergleich der berechneten mit den gemessenen Eigenfrequenzen erfolgt in Tab. 12.

Mode	gemessen	transformiert	rel. Fehler	optimiert	rel. Fehler
[1,1]	277	277	0.1 %	258	-6.8 %
[2,0]	477	471	-1.3 %	492	3.2 %
[0,2]	582	547	-6 %	593	1.8 %
[2,1]	691	734	6.2 %	719	4.1 %
[1,2]	782	785	0.4 %	791	1.2 %
[2,2]	1237	1359	9.9 %	1318	6.5 %
[3,0]	1308	1298	-0.8 %	1356	3.7 %
[3,1]	1479	1333	-9.9 %	1386	-6.3 %
[0,3]	1618	1508	-6.8 %	1600	-1.1 %
[1,3]	1740	1539	-11.6%	1633	-6.2 %
[3,2]	2080	1560	-25 %	1657	-20.3%
[2,3]	2269	1717	-24.3%	1810	-20.2%

Tab. 12: Vergleich der gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen, *Rayleigh-Ritz*

Die Sensitivitätsmatrix für die vier im *Rayleigh-Ritz*'schen Verfahren berücksichtigten Parameter ist der Abb. 5.33 zu entnehmen. Die Querdehnzahl ν_{xy} weist dabei eine deutlich geringere Sensitivität auf als die Elastizitätsmoduln E_x und E_y und der Schubmodul G_{xy} . Ihr Einfluß wächst jedoch mit zunehmender Ordnung der Eigenformen.

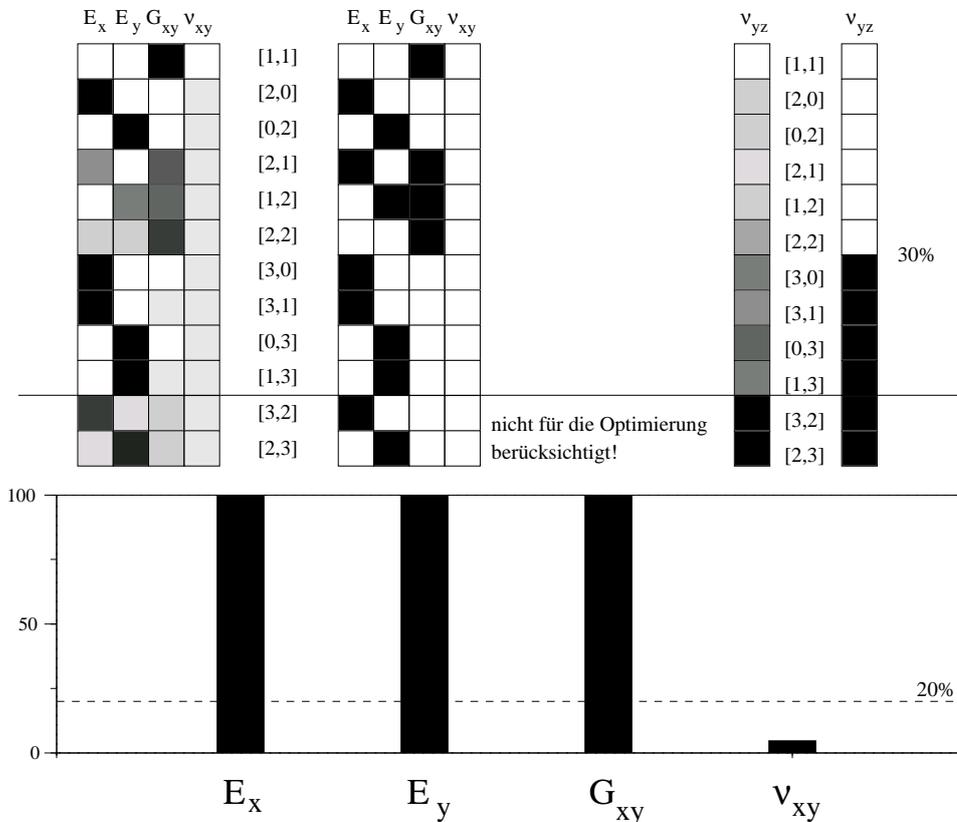


Abb. 5.33: Parametersensitivitäten beim *Rayleigh-Ritz*'schen Verfahren

Anschließend wurde eine FE-Rechnung mit ebenen 4-Knoten Schalenelementen vom Typ "shell43" durchgeführt. Auch dabei konnte eine gute Übereinstimmung zum Experiment erzielt werden. Wie Tab. 13 zeigt ergaben sich rel. Frequenzabweichungen von unter 5%.

Mode	gemessen	transformiert	rel. Fehler	optimiert	rel. Fehler
[1,1]	277	261	-5.8 %	268	-3.4 %
[2,0]	477	458	-4.1 %	479	.5 %
[0,2]	582	543	-6.7 %	582	0 %
[2,1]	691	693	0.3 %	714	3.4 %
[1,2]	782	742	-5.1 %	782	0 %
[2,2]	1237	1248	0.9 %	1290	4.3 %
[3,0]	1308	1261	-3.6 %	1310	.2 %
[3,1]	1479	1454	-1.7 %	1509	2 %
[0,3]	1618	1470	-9.1 %	1582	-2.2 %
[1,3]	1740	1651	-5.1 %	1751	.7 %
[3,2]	2080	2023	-2.7 %	2083	0.1 %
[2,3]	2269	2132	-6 %	2228	-1.8 %

Tab. 13: Gemessene und berechnete Eigenfrequenzen, 2D-Schalenelemente

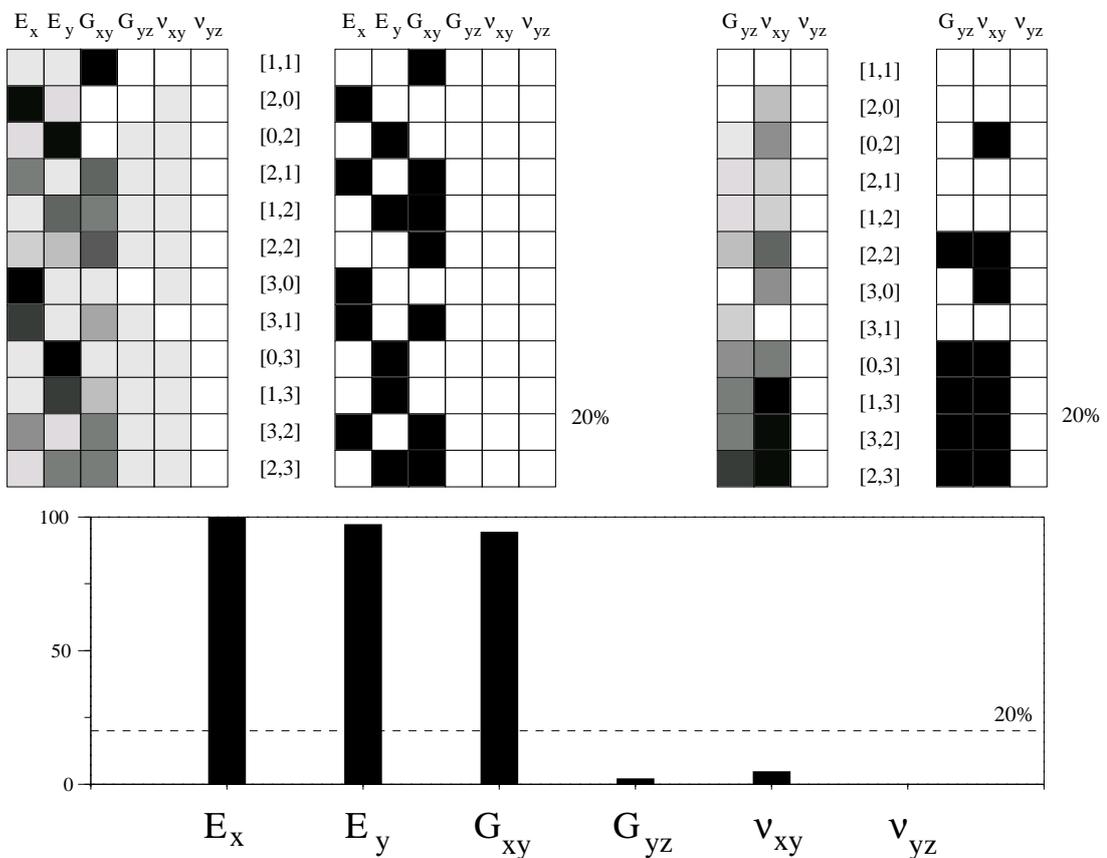


Abb. 5.34: Parametersensitivitäten bei Verwendung von 2D-Schalenelementen

Die Sensitivitätsmatrix in Abb. 5.34 zeigt, wie schon bei der analytischen Lösung in Abb. 5.33, eine ausreichende Sensitivität nur für die Elastizitätsmoduln E_x und E_y sowie den Schubmodul G_{xy} . Für den Schubmodul G_{xy} und die Querdehnzahl ν_{xy} ergibt sich eine schwache, für die Querdehnzahl ν_{yz} gar keine Sensitivität.

Ein abschließender Vergleich der mit den unterschiedlichen Verfahren ermittelten Material- bzw. Bauteilparametern ist in Tab. 14 zusammengestellt.

Materialparameter			Bauteilparameter			
	Startwert	3D		transformiert	2D	analytisch
E_T	1160	1160	E_z	1160	$= E_y$	–
E_L	14000	14895	E_x	14903	16200	16446
E_R	2280	2993	E_y	1160	1360	1374
G_{LR}	1640	1334	G_{xy}	1093	1150	947
G_{TR}	465	321	G_{yz}	484	416	–
G_{TL}	1080	928	G_{xz}	1093	$= G_{xy}$	–
ν_{LR}	0.0731	0.058	ν_{xy}	0.0317	0.0196	0.0155
ν_{RT}	0.360	0.503	ν_{yz}	0.810	(0.810)	–
ν_{LT}	0.0429	0.041	ν_{xz}	0.0317	$= \nu_{xy}$	–

Tab. 14: Zusammenstellung der identifizierten Material- und Bauteilparameter

6 Rheonomes Verhalten von Holz

Abweichend von den Annahmen der klassischen Elastizitätstheorie besteht bei Holz wie bei allen realen Werkstoffen kein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem momentanen Verzerrungszustand und dem Spannungszustand. Man beobachtet, daß bei konstant gehaltener Belastung unterhalb der Fließgrenze die Verzerrungen im Werkstoff mit der Zeit zunehmen (Retardation, Kriechen), während andererseits die Spannungen bei konstanter Deformation mit der Zeit abnehmen (Relaxation). Die Beschreibung des momentanen Spannungszustandes mit Hilfe der Verzerrungen gelingt also nur bei Kenntnis der gesamten Verformungsgeschichte. Der Werkstoff besitzt ein "Gedächtnis". Daraus ergibt sich außerdem, daß Formänderungen, anders als beim ideal elastischen Medium, nicht mehr verlustfrei erfolgen, sondern daß bei jeder Belastung Energie dissipiert wird.

Beim Holz wie auch bei Kunststoffen oder Metallen bei hohen Temperaturen sind diese Effekte häufig so groß, daß sie nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

6.1 Mathematische Beschreibung des linear viskoelastischen Materialverhaltens

Zur Beschreibung der Zeitabhängigkeit von Spannungen und Verzerrungen wurde der Begriff des viskoelastischen Körpers geprägt, in dem sich die Modellvorstellungen des viskosen *Newton'schen* Fluides und des elastischen *Hooke'schen* Festkörpers verbinden. Eine Beschränkung auf lineare Viskoelastizität ergibt sich aus der Voraussetzung

- infinitesimaler Verformungen und daraus resultierender linearer Verschiebungs-Verzerrungs-Bedingungen und
- der Gültigkeit des *Boltzmann'schen* Überlagerungsprinzips.

Der Gedächtniseffekt bei linear viskoelastischem Werkstoffverhalten äußert sich in den beiden Phänomenen der Relaxation und der Retardation (siehe Abb. 6.1).

Daraus ergeben sich die Möglichkeiten zur mathematischen Darstellung des zeitabhängigen Zusammenhanges zwischen Spannung und Verzerrung mittels Relaxationsfunktion oder mittels Retardationsfunktion, je nachdem welche Größe aus welcher berechnet werden soll. Im folgenden wird nur die zweite Möglichkeit weiter verfolgt, da sich alle Überlegungen analog auf Relaxationsfunktionen übertragen lassen.

Wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die konstante Spannung σ_0 auf eine bis dahin unverformte und unbelastete Zugprobe aufgebracht, so läßt sich mit Hilfe der Retardationsfunktion $\Gamma(t)$ der daraus resultierende Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ beschreiben:

$$\varepsilon(t) = \Gamma(t) \sigma_0. \quad (6.1)$$

Die Retardationsfunktion $\Gamma(t)$ ist weder von der Lage noch von der Form des Körpers abhängig, sondern allein von der Zeit t . Sie beschreibt das Werkstoffverhalten eindeutig.

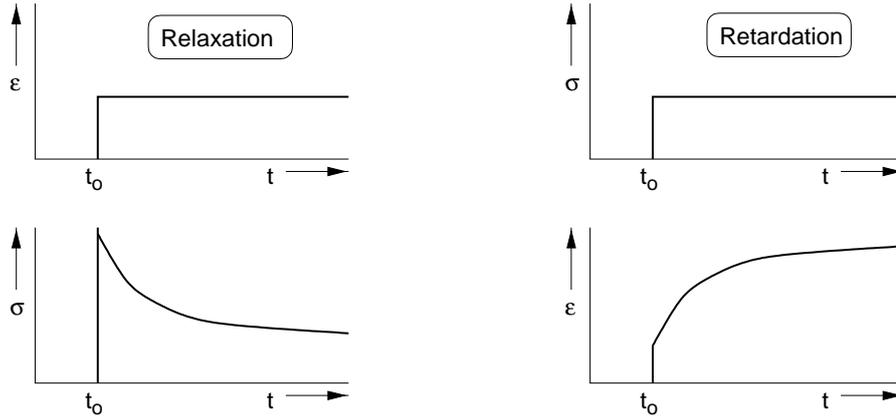


Abb. 6.1: Lineare Viskoelastizität: Relaxation und Retardation

Wie Abb. 6.1 verdeutlicht, ist $\Gamma(t)$ eine positive, streng monoton steigende Funktion, deren Differentialquotient mit der Zeit kleiner wird:

$$\Gamma(t) > 0, \quad \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Gamma(t)}{\partial t^2} < 0 \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (6.2)$$

Außerdem muß das Axiom der Rückwirkungsfreiheit gelten, da eine Änderung des Spannungszustandes nur die Dehnungen in der Zukunft, nicht aber in der Vergangenheit beeinflussen kann:

$$\Gamma(t) = 0 \quad \text{für alle } t < 0. \quad (6.3)$$

Werden nun nacheinander zu den Zeitpunkten τ_i die n Spannungen $\Delta\sigma_i$ aufgebracht, so ergeben sich daraus die inkrementellen Dehnungen

$$\Delta\varepsilon_i = \Gamma(t - \tau_i) \Delta\sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4)$$

Nach dem *Boltzmann'schen* Überlagerungsprinzip gilt für die Gesamtdehnung:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \Gamma(t - \tau_i) \Delta\sigma_i. \quad (6.5)$$

Liegt die Spannung $\sigma(t)$ als eine kontinuierliche Funktion der Zeit vor, so geht die Summation in eine Integration über. Um sicherzustellen, daß bei Versuchsbeginn eine unverformte Probe vorlag, wird als Anfangszeitpunkt $t_0 \rightarrow -\infty$ gewählt.

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (6.6)$$

Die Funktion $\Gamma(t - \tau)$ wird auch als Gedächtnisfunktion bezeichnet, da sie den Einfluß einer zurückliegenden Spannungsänderung $\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$ zum Zeitpunkt τ auf die momentane Dehnung $\varepsilon(t)$ beschreibt. Partielle Integration von (6.6) liefert:

$$\varepsilon(t) = \Gamma(0) \sigma(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Gamma(t - \tau)}{\partial \tau} \sigma(\tau) d\tau. \quad (6.7)$$

Gleichung (6.7) bildet eine Analogie zum *Hooke'schen* Gesetz und geht in dieses über, wenn G zeitunabhängig ist. Sie kann auch auf mehrachsige Spannungszustände erweitert werden ([1, 103, 111]).

Aus diesem Werkstoffgesetz ergeben sich Integro-Differentialgleichungen, die im allgemeinen nicht oder nur sehr aufwendig lösbar sind. Deshalb versucht man, die Retardationsfunktion näherungsweise durch Reihenansätze zu approximieren. Die Monotonieeigenschaften (6.2) legen dabei die Verwendung von Exponentialfunktionen nahe:

$$\Gamma(t - \tau) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (1 - e^{-b_i(t-\tau)}), \quad (t - \tau) \geq 0; \quad (6.8)$$

a_0, a_i, b_i – positive Konstanten

Durch die Definition zusätzlicher "innerer Variablen" y_i wird die Integration in (6.7) umgangen:

$$y_i(t) = a_i b_i \int_{-\infty}^t e^{-b_i(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.9)$$

Das Stoffgesetz lautet nun:

$$\varepsilon(t) = a_0 \sigma(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t). \quad (6.10)$$

Die sogenannten "Evolutionsgleichungen" für die inneren Variablen y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ergeben sich aus (6.9) durch Differentiation nach der Zeit t :

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = a_i b_i \sigma(t) - b_i y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.11)$$

Stoffgesetze, die linear viskoelastisches Werkstoffverhalten beschreiben, lassen sich auch anhand von phänomenologischen Ersatzmodellen aufstellen, die sich aus linear elastischen Federn und linear viskosen Dämpfern zusammensetzen. Abb. 6.2 zeigt beispielhaft einige dieser in der Literatur [1, 103] ausführlicher behandelten Modelle sowie ihre Relaxations- und Retardationsfunktionen. Die Relaxationsfunktionen erhält man als zeitlichen Verlauf der Spannung $\sigma(t)$ nach Aufbringen einer konstanten Dehnung ε_0 zum Zeitpunkt τ_0 . Die Retardationsfunktion (Kriechkurve) zeigt den Verlauf der Dehnung $\varepsilon(t)$ infolge einer konstanten Spannung σ_0 .

Die dargestellten Modelle beschreiben das Verhalten eines infinitesimalen Elementes eines linear viskoelastischen Körpers und sind trägheitsfrei. Sie gelten nur für einen einachsigen Spannungszustand.

Durch Reihen- oder Parallelschaltung mehrerer solcher Modelle und geeignete Wahl der Federsteifigkeiten E_i und Dämpfungskonstanten D_i lassen sich experimentell ermittelte Relaxations- und Kriechkurven beliebig genau annähern.

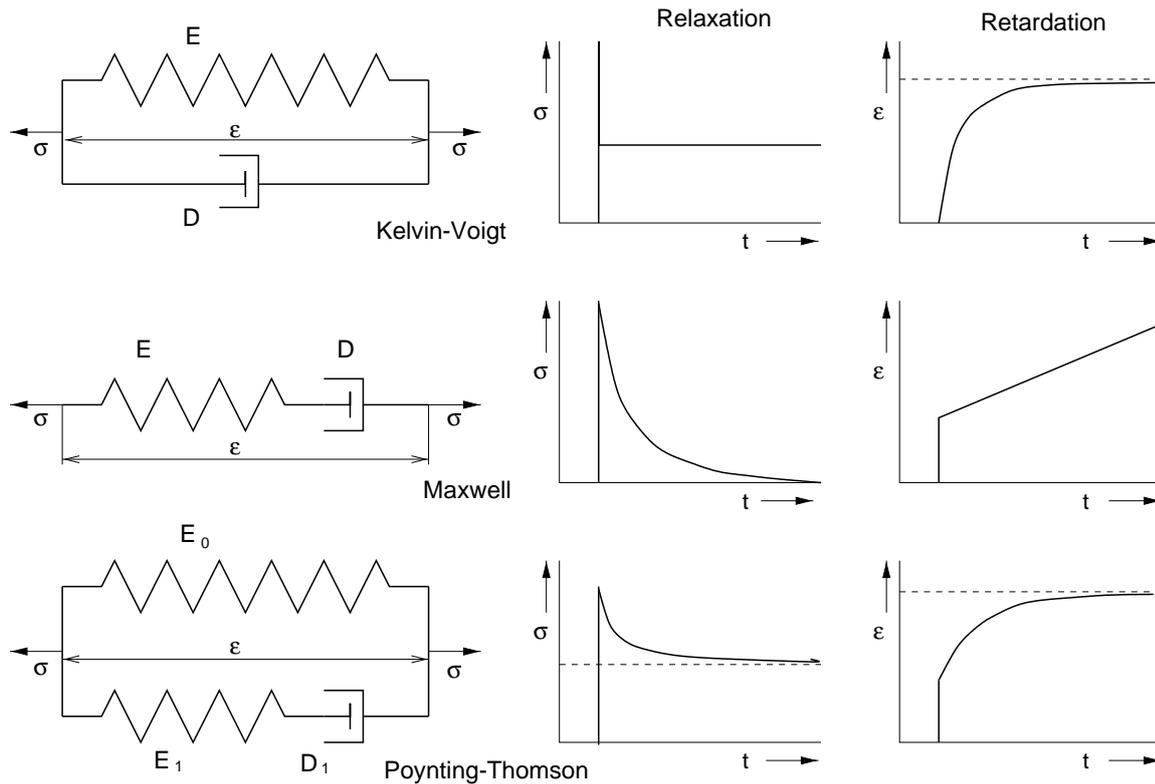


Abb. 6.2: Lineare Viskoelastizität: Phänomenologische Werkstoffmodelle

6.2 Identifikation von viskoelastischen Materialparametern

6.2.1 Werkstoffmodell mit drei Parametern

Die Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Holz soll mit Hilfe des in Abb. 6.3 dargestellten erweiterten *Kelvin-Voigt* Modells erfolgen. Die Gesamtdehnung ε setzt sich aus einem elastischen Anteil ε_{el} und einem viskoelastischen ε_{vis} zusammen:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{el}(t) + \varepsilon_{vis}(t) = \frac{1}{E_0} \sigma(t) + \varepsilon_{vis}(t). \quad (6.12)$$

Die Gleichgewichtsbedingung an der rechten Traverse liefert:

$$E_{vis} \varepsilon_{vis}(t) + D_{vis} \dot{\varepsilon}_{vis}(t) = \sigma(t); \quad (6.13)$$

Der Vergleich von (6.12) und (6.13) mit (6.10) bzw. (6.11) zeigt, daß dieses phänomenologische Werkstoffmodell zu den selben Gleichungen führt wie die Beschreibung mit Hilfe von Gedächtnisintegralen und inneren Variablen. Dabei entspricht die innere Variable y_i der Dehnung ε_{vis} des viskosen Dämpfers, während für die Parameter a_i und b_i gilt:

$$a_i = \frac{1}{E_i} \quad \text{und} \quad b_i = \frac{E_i}{D_i}.$$

Im folgenden soll nun versucht werden, die Parameter dieses einachsigen Werkstoffmodells zu identifizieren, so daß eine optimale Approximation gemessener Kriechkurven erfolgt.

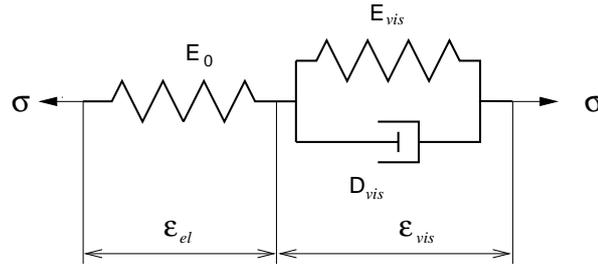


Abb. 6.3: Viskoelastisches Materialmodell mit drei Parametern

Dazu liegen Meßwerte einer Zugprobe aus Fichtenholz ($100 \times 10 \times 5 \text{ mm}^3$, 18% Holzfeuchte, $\sigma_z = 2.0 \text{ MPa}$ in radialer Richtung) in Form von Dehnungen zu logarithmisch gestuften Zeitpunkten über einen Zeitraum von etwa 280h vor.⁶

Der elastische Parameter E_0 ergibt sich aus der zu Beginn der Messung nach wenigen Sekunden auftretenden Spontandehnung.

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon(t=5\text{sec})} \quad (6.14)$$

Zu identifizieren sind nun noch die beiden Parameter E_{vis} und D_{vis} . Die vollständige Gleichung der Kriechkurve lautet:

$$\varepsilon = \varepsilon_{elas} + \frac{\sigma}{E_{vis}}(1 - \exp(-\frac{E_{vis}}{D_{vis}}t)) \quad (6.15)$$

Gute Startwerte ergeben sich aus folgenden Überlegungen:

- Der Parameter E_{vis} beschreibt den Gesamtbetrag der auftretenden viskoelastischen Dehnung:

$$E_{vis} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{elas}}. \quad (6.16)$$

- Zum Zeitpunkt $t = \frac{E_{vis}}{D_{vis}}$ liefert (6.15) einen Anteil von $1 - \exp(-1) \approx 63\%$ der auftretenden viskoelastischen Dehnung. Daraus läßt sich der Parameter D_{vis} abschätzen.

$$D_{vis} = E_{vis} t_{63\%}. \quad (6.17)$$

Eine Verbesserung der Approximation läßt sich erreichen, indem man den maximal auftretenden Fehler durch einen nichtlinearen Optimierungsalgorithmus minimiert.

Wenn die Meßwerte bis zur "Sättigung" vorliegen (Abb. 6.4, linkes Bild), bringt die Optimierung kaum eine Änderung. Am Ende der Kriechkurve stimmen Meßwerte und Approximation überein. Tritt keine "Sättigung" auf oder wurde die Messung vorher abgebrochen (Abb. 6.4, rechtes Bild) führt die Optimierung zu einer verringerten Dämpfung D_{vis} und auch am Ende der Messung ergibt sich eine Abweichung zwischen Meßwerten und Approximation. Im vorliegenden Beispiel betrug die maximalen Fehler 28% bzw. 12%.

⁶Die Messungen wurden im Rahmen eines DFG-Themas [40] am Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik der TU Dresden durchgeführt.

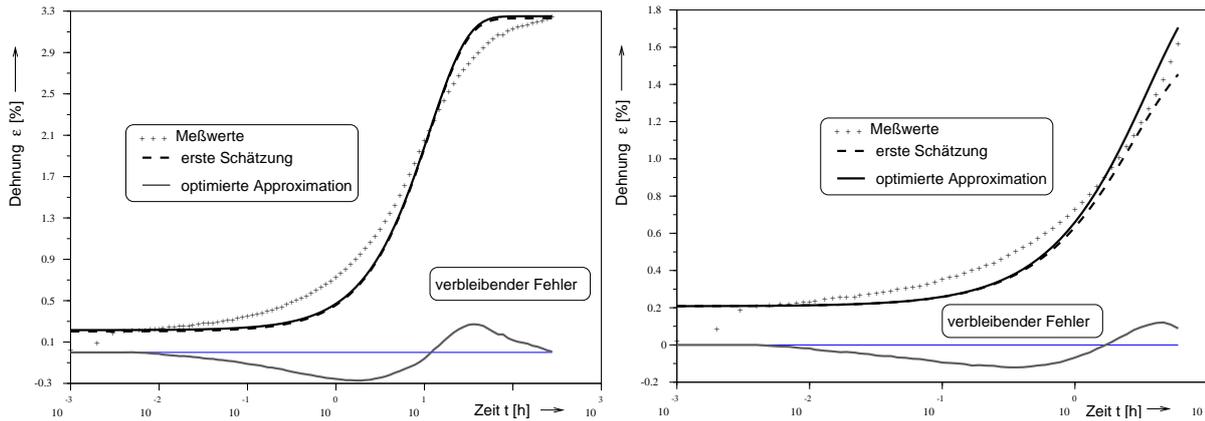


Abb. 6.4: Approximation von Kriechkurven mit drei Parametern

	Versuchsdauer 280h		Versuchsdauer 6h	
	Schätzung	Optimierung	Schätzung	Optimierung
E_0 [MPa]	930			
E_{vis} [MPa]	66.1	65.8	143	110
D_{vis} [MPa h]	751	750	397	390
Verbleibender Fehler	28%		12%	

Tab. 15: Identifizierte viskoelastische Parameter, Drei-Parameter-Modell

6.2.2 Werkstoffmodell mit fünf Parametern

Eine bessere Approximation läßt sich mit Hilfe des ins Abb. 6.5 dargestellten Fünf-Parameter-Modells erreichen.

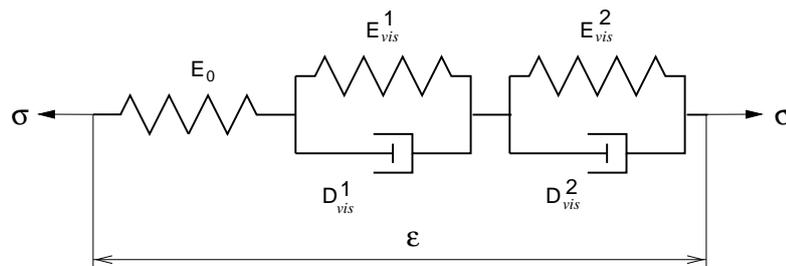


Abb. 6.5: Viskoelastisches Materialmodell mit fünf Parametern

Wie schon beim Drei-Parameter-Modell läßt sich der elastische Parameter E_0 direkt aus der Spontandehnung berechnen:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon(t=5\text{sec})} \quad (6.18)$$

Günstige Startwerte für die verbleibenden Parameter erhält man, indem man die gesamte viskoelastische Nachgiebigkeit

$$E_{vis}^{ges} := \frac{\sigma}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{elas}} \quad (6.19)$$

folgendermaßen auf die einzelnen *Kelvin-Voigt* Modelle verteilt:

$$E_{vis}^1 = E_{vis}^{ges} e^1, \quad (6.20)$$

$$E_{vis}^2 = \frac{E_{vis}^{ges} E_{vis}^1}{E_{vis}^1 - E_{vis}^{ges}}.$$

Die Dämpfungen werden anhand der Zeitpunkte $t_{25\%}$ und $t_{75\%}$ gewählt, bei denen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ der auftretenden viskoelastischen Dehnung erreicht werden.

$$D_{vis}^1 = E_{vis}^1 t_{25\%} \quad (6.21)$$

$$D_{vis}^2 = E_{vis}^2 t_{75\%} \quad (6.22)$$

Bei der numerischen Optimierung dieser vier Parameter verbessert sich die Approximation sowohl im "gesättigten" Fall (Abb. 6.6, links) als auch im "ungesättigten" (Abb. 6.6, rechts). Die maximalen Abweichungen betragen jetzt nur noch 12% bzw. 7% und sind damit deutlich geringer als bei Verwendung des Drei-Parameter-Modells.

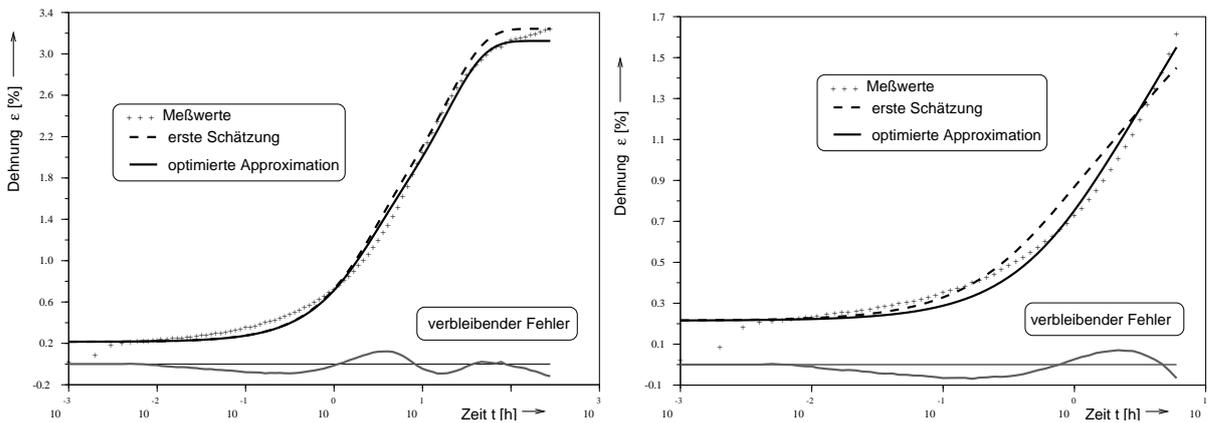


Abb. 6.6: Approximation von Kriechkurven mit fünf Parametern

Das nächste Bild zeigt die selben Kriechkurven bei nichtlogarithmischer Zeitachse.

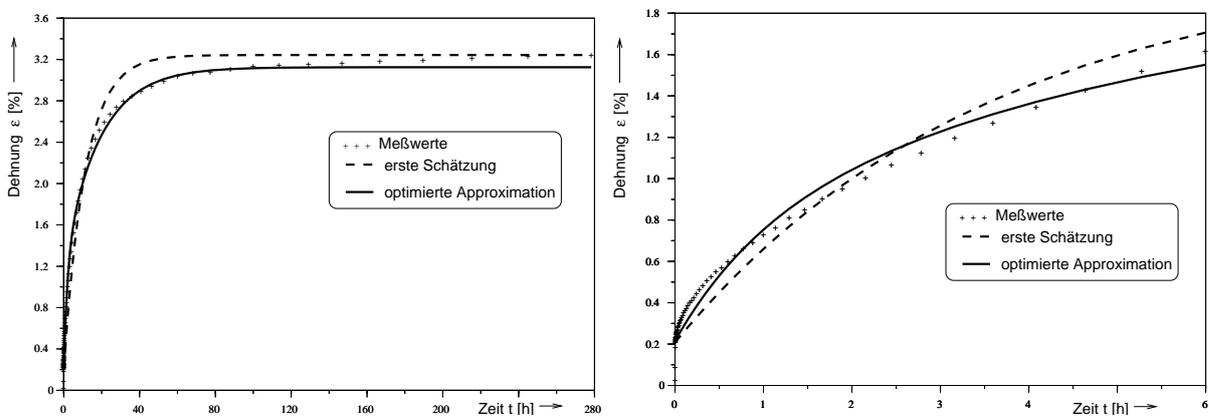


Abb. 6.7: Approximierte Kriechkurven bei nichtlogarithmischer Zeitachse

	Versuchsdauer 280h		Versuchsdauer 6h	
	Schätzung	Optimierung	Schätzung	Optimierung
E_0 [MPa]	930			
E_{vis}^1 [MPa]	180	197	387	373
D_{vis}^1 [MPa h]	387	392	204	369
E_{vis}^2 [MPa]	100	105	226	161
D_{vis}^2 [MPa h]	1980	1982	811	932
Verbleibender Fehler	12%		7%	

Tab. 16: Identifizierte viskoelastische Parameter, Fünf-Parameter-Modell

6.3 Ein verallgemeinertes Werkstoffmodell

Im allgemeinen Fall ist das Verformungsverhalten von Holz eine explizite Funktion der mechanischen Spannungen σ , der Feuchte X , der Temperatur T sowie der Zeit t . Rein formal läßt sich dieser Zusammenhang darstellen als:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}(t) = & \int_0^t J_{ijkl}^\sigma(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\
& + \int_0^t J_{ij}^X(t-\tau) \frac{\partial X(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\
& + \int_0^t J_{ij}^T(t-\tau) \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^t J_{ijklmn}^{\sigma\sigma}(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \frac{\partial \sigma_{mn}(\tau_2)}{\partial \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\
& + \int_0^t \int_0^t J_{ijkl}^{\sigma X}(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \frac{\partial X(\tau_2)}{\partial \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \dots
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Die höheren Terme mit $J_{ijklmn}^{\sigma\sigma}$, J_{ij}^{XX} und J_{ij}^{TT} , die nichtlineare Effekte von Spannung, Feuchte und Temperatur beschreiben, werden im allgemeinen vernachlässigt. Dagegen hat es sich herausgestellt, daß dem Term mit $J_{ijkl}^{\sigma X}$ bei Holz eine besondere Bedeutung zu kommt. Dieser Effekt wurde erstmalig Ende der 50er Jahre in Australien beobachtet [5, 4, 6], später wurden die Experimente in England wiederholt [47]. Es zeigte sich, daß bei zyklisch wechselnder Holzfeuchte und konstanter mechanischer Belastung Kriechverformungen auftreten können, die das 20-fache der elastischen Verformung betragen. Erste Versuche zur mathematischen Beschreibung dieses als mechano-sorptives Kriechen bezeichneten Phänomens stammen aus den 70er Jahren [83, 112, 37].

Abbildung 6.8 zeigt einen experimentellen Nachweis des mechanosorptiven Kriechens. Im oberen Teil sind zwei Kriechkurven wiedergegeben, die unter gleicher, konstanter Last, aber bei unterschiedlichen Feuchteniveaus aufgenommen wurden. Probe 1 besitzt einen Feuchtegehalt von $X=0.18$ und zeigt deutliches Kriechen, während bei der trockenen Probe 2 ($X=0.12$) im betrachteten Zeitraum von $t=10$ h kaum Kriechen zu beobachten ist. Probe 3 wurde derselben Last unterworfen und gleichzeitig von $X=0.24$ auf $X=0.07$ getrocknet. Die Referenzprobe 4 wurde nicht belastet, sondern lediglich getrocknet.

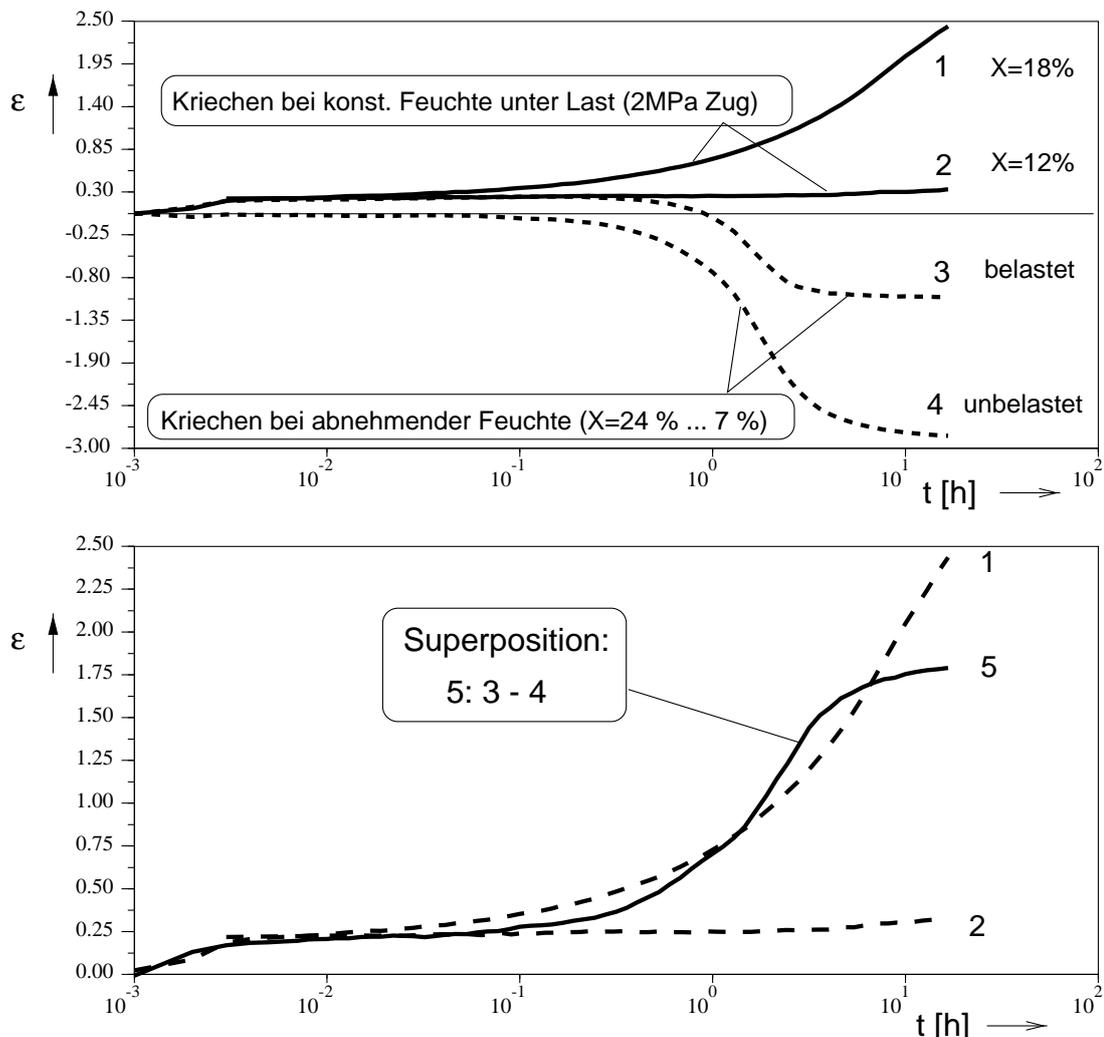


Abb. 6.8: Experimenteller Nachweis des mechanosorptiven Kriechens.

Die Schwindung aufgrund des Trocknens überwiegt den Krieeffekt, so daß sowohl Probe 3 als auch Probe 4 negative Verzerrungen aufweisen. Im unteren Teil von Abb. 6.8 ist die Superposition der Kurven 3 und 4 dargestellt und somit der Verlauf von 3 um die freie Schwindung reduziert worden. Die resultierende Kurve 5 liegt nun nicht, wie man erwarten könnte, zwischen den Kurven 1 und 2, sondern zeigt eine deutlich höhere Kriechneigung, solange sich der Feuchtegehalt ändert.

Um auch diesen Effekt beschreiben zu können, der insbesondere bei der Holz Trocknung eine wichtige Rolle spielt, wird das in Abb. 6.9 dargestellte, erweiterte Werkstoffmodell

verwendet.

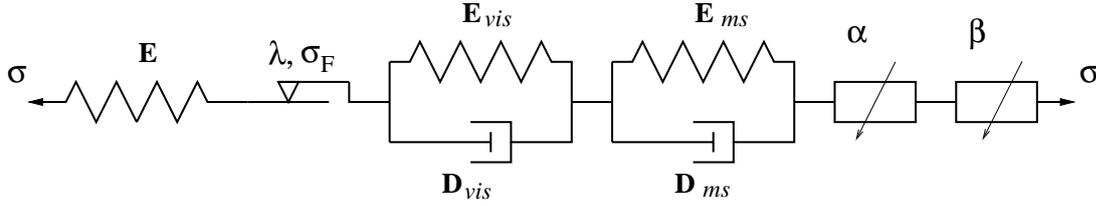


Abb. 6.9: Phänomenologisches Werkstoffmodell

Die Gesamtdehnung $\varepsilon = \varepsilon(t, T, X)$ ist eine Funktion der Zeit, Temperatur und Feuchte und setzt sich zusammen aus einem elastischen Anteil ε_{el} , einem plastischen ε_{pl} , einem viskoelastischen ε_{vis} und einem mechanosorptiven Anteil ε_{ms} , sowie der thermischen Ausdehnung ε_T und der feuchtebedingten Schwindung ε_X .

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} + \varepsilon_{vis} + \varepsilon_{ms} + \varepsilon_T + \varepsilon_X. \quad (6.24)$$

Die einzelnen Anteile können in einer für numerische Berechnungen günstigen Form dargestellt werden als:

$$\varepsilon_{el} = E_{el}^{-1}(T, X) \sigma(t), \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{pl}}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(t) < \sigma_F \\ \lambda \sigma & \text{für } \sigma(t) = \sigma_F \end{cases}, \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{vis}}{\partial t} = D_{vis}^{-1}(T, X) (\sigma(t) - E_{vis}(T, X) \varepsilon_{vis}) \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ms}}{\partial X} = D_{ms}^{-1}(T, X) (\sigma(t) - E_{ms}(T, X) \varepsilon_{ms}) \quad (6.28)$$

$$\varepsilon_T = \alpha(T, X) (T - T_0), \quad (6.29)$$

$$\varepsilon_X = \beta(T, X) (X - X_0). \quad (6.30)$$

Man beachte, daß sämtliche Parameter Funktionen der Temperatur T und der Feuchte X sind. Die differentielle Darstellung des mechano-sorptiven Kriechens ähnelt der der Viskoelastizität ε_{vis} , bis auf die Vertauschung der unabhängigen Variablen Zeit t und Feuchtigkeit X .

6.4 Numerische Simulation des mechanosorptiven Kriechens

Die Abbildung 6.10 soll veranschaulichen, wie das Phänomen des mechanosorptiven Kriechens unter Verwendung des gewählten Werkstoffmodells numerisch simuliert werden kann (s.a. [107]). Dazu wurden die Gleichungen (6.24) bis (6.30) mit dem Programm SCILAB [61] ausgewertet. Vereinfachend wurde eine konstante Temperatur angenommen und das Lastniveau unterhalb der Plastizitätsgrenze gewählt. Die dimensionslosen Parameter haben in diesem Fall nur qualitativen Charakter.

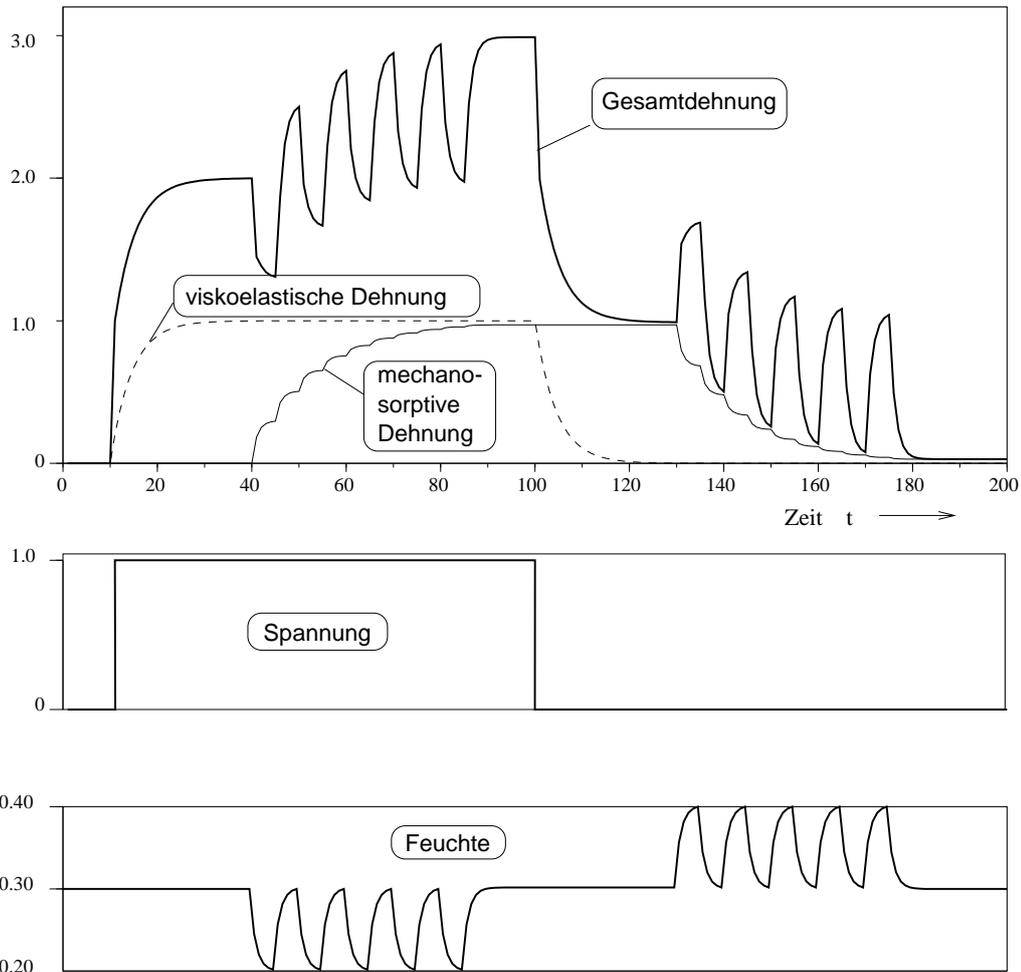


Abb. 6.10: Phänomenologie des mechanosorptiven Kriechens

Zum Zeitpunkt $t=5$ wird auf das ansonsten unbelastete Modell eine Zugspannung der Größe $\sigma = 1$ aufgebracht. Die Feuchtigkeit wird zunächst konstant auf $X=0.3$ gehalten.

Es ergibt sich spontan eine elastische Dehnung vom Betrag $\varepsilon = 1$, der sich ein viskoelastischer Kriechvorgang anschließt. Dieser Kriechvorgang dauert bis zum Zeitpunkt $t=30$. Ab diesem Zeitpunkt wird die Feuchte zyklisch zwischen $X=0.20$ und $X=0.30$ variiert.

Das Material reagiert ohne zeitliche Verzögerung mit deutlichem Schwinden bzw. Quellen. Gleichzeitig kommt es zu mechanosorptivem Kriechen, welches sich durch eine zusätzliche Zunahme der Dehnung während der Feuchtezyklen zeigt. Ab dem Zeitpunkt $t=80$ wird die Feuchte wieder konstant auf dem Ausgangswert $X=0.3$ gehalten. Obwohl sämtliche Schwindungs- und Quellvorgänge damit ausgeglichen sind, ist die Gesamtdehnung auf einen Wert von $\varepsilon = 3$ angestiegen.

Nach Wegnahme der mechanischen Spannung zum Zeitpunkt $t=100$ verringert sich die Dehnung spontan um ihren elastischen Anteil. Bis $t=120$ ist auch der viskoelastische Anteil abgeklungen und es bleibt lediglich die akkumulierte mechanosorptive Dehnung übrig. Durch erneutes zyklisches Variieren der Feuchte kann auch dieser Anteil rückgängig gemacht werden, so daß am Ende keine bleibenden Dehnungen mehr auftreten.

7 Die Holz Trocknung als Anwendungsbeispiel

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist die Berechnung der bei der Holz Trocknung auftretenden Spannungen und Verformungen Gegenstand der internationalen aktuellen Forschung. Deren zeitlichen Verlauf zu kennen und beschreiben zu können ist wichtig, um diesen Prozeß zu verstehen, zu optimieren und dadurch kostspielige Trocknungsfehler zu vermeiden. Da praktisch alles Holz vor der Weiterverarbeitung getrocknet werden muß, stellt diese Kenntnis einen nicht zu unterschätzenden wirtschaftlichen Faktor dar.

7.1 Sensitivitätsanalyse und Reduktion auf ebenes Problem

Um einen ersten Überblick über den Einfluß der Materialparameter auf das Verformungsverhalten und die Spannungsentstehung bei der Holz Trocknung zu erlangen, wurde eine 3D-FE-Simulation der Trocknung eines Buchenholz Brettes unter Annahme von rein elastischem Materialverhalten durchgeführt. Das Brett wurde als typisches Seitenbrett mit einem Abstand von 100 mm von der Wuchssachse modelliert und hatte die Abmessungen (800 x 200 x 50) mm³.

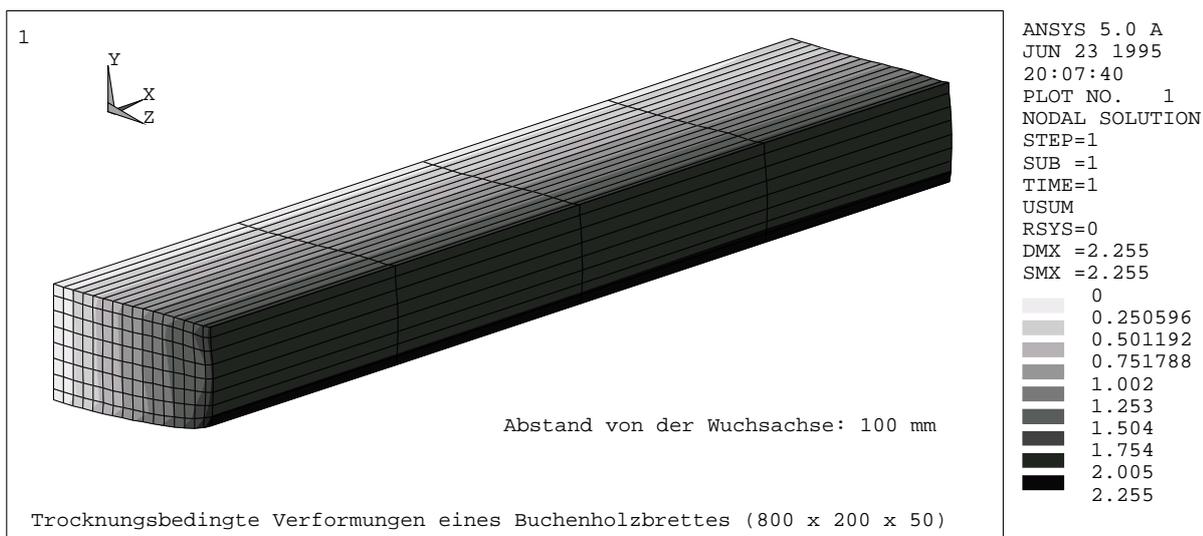


Abb. 7.1: Verformungen eines getrockneten Buchenbrettes.

Es wurden Materialparameter für Rotbuche entsprechend Tab. 17 verwendet. Im Ausgangszustand wurde das Brett bei einer homogenen Holzfeuchte (über dem Fasersättigungspunkt) als spannungsfrei angenommen. Unter Verwendung der Feuchte/Wärme-Analogie (ANSYS kann keine Feuchtefelder berechnen) wurde dann eine Temperaturverteilung als Last vorgegeben. Die Parameter wurden in linearer Abhängigkeit von der örtlichen Temperatur mit einem Faktor $0.85 \leq c \leq 1.22$ skaliert. Für die anisotrope differentielle Schwindung wurden Werte β_i aus der Literatur [101] angesetzt, die unterhalb des Fasersättigungspunktes als konstant angenommen und oberhalb desselben um eine Größenordnung reduziert wurden. Das Brett wurde mit insgesamt $4 \times 8 \times 15 = 480$ Elementen

vom Typ solid64 vernetzt und auf einer HP-Workstation als elastisches Problem in einem Lastschritt gelöst. Aus Symmetriegründen wurde nur eine Hälfte des Brettes (mit der x-y-Ebene als Symmetrieebene) berechnet.

Obwohl die dabei berechneten Spannungen deutlich zu hoch sind, stimmen die Verformungen (siehe Abb. 7.1) gut mit den Beobachtungen der Praxis überein. Im folgenden sollen auch weniger die quantitativen Ergebnisse ausgewertet werden, als vielmehr auf qualitative Zusammenhänge und relative Verhältnisse der Spannungen und Verformungen untereinander eingegangen werden.

Aus allen auftretenden Spannungen und Verschiebungen sämtlicher Knoten des betrachteten FE-Modells wurden jeweils die Maximalwerte ausgewählt und als Ergebnisvektor abgespeichert. Eine grafische Darstellung dieses Ergebnisvektors ist in Abb. 7.2 zu sehen. Durch systematisches Variieren der 12 beteiligten Materialparameter (Elastizitätsmoduln E_i , Schubmoduln G_{ij} , Querdehnzahlen ν_{ij} und Quellungskoeffizienten β_i) und Berechnen der Parametersensitivitäten entsprechend Gl.(5.60) erhält man die in Abb. 7.3 dargestellte Sensitivitätsmatrix.

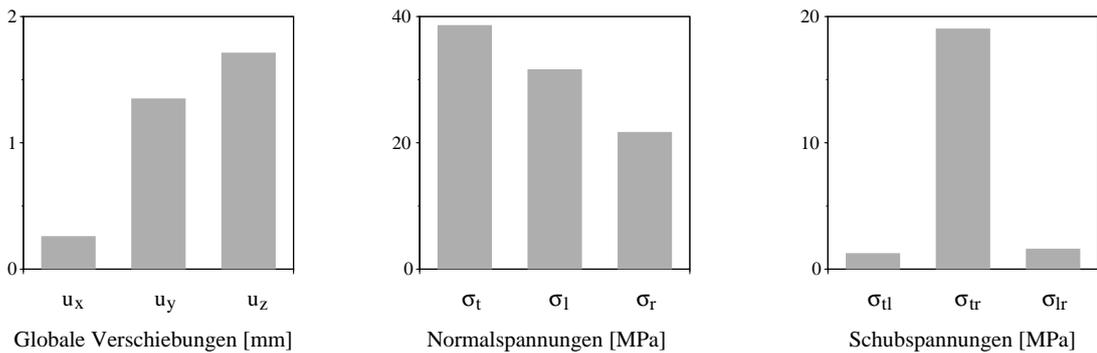


Abb. 7.2: Maximalwerte der Spannungen und Verschiebungen

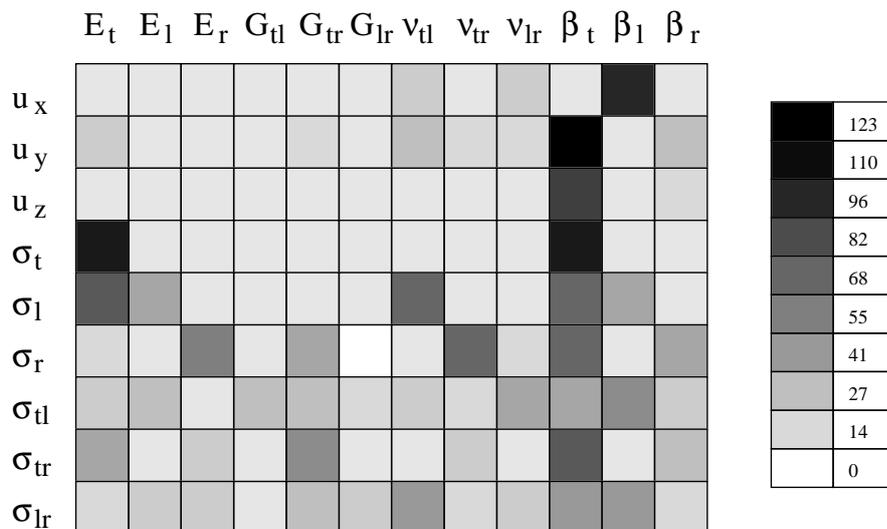


Abb. 7.3: Sensitivitätsmatrix für die Holz Trocknung

Vernachlässigt man alle Komponenten dieser Matrix, deren Sensitivität geringer als 20% ist, so ergibt sich die in Abb. 7.4 dargestellte übersichtlichere Sensitivitätsmatrix.

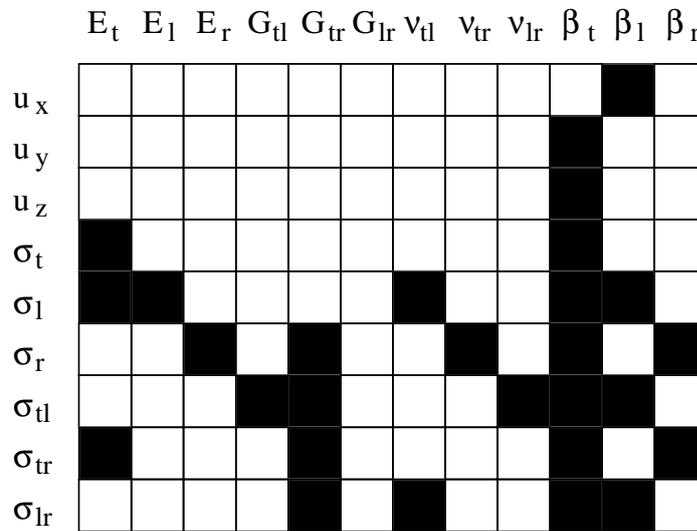


Abb. 7.4: Komponenten der Sensitivitätsmatrix mit über 20% relativer Sensitivität.

Die Trocknungsqualität wird in erster Linie durch das Vermeiden von Rissen und zu großen Verformungen bestimmt. Nimmt man an, daß eine gewisse Proportionalität zwischen Steifigkeit und Festigkeit besteht, so kann man aus den auftretenden maximalen Spannungen auf das Bruchrisiko schließen, indem man die Werte durch die jeweiligen Elastizitäts- bzw. Schubmoduln dividiert. Eine anschließende Normalisierung im Bezug auf den jeweils größten Wert führt zu den gewichteten Spannungen und Verschiebungen in Abb. 7.5.

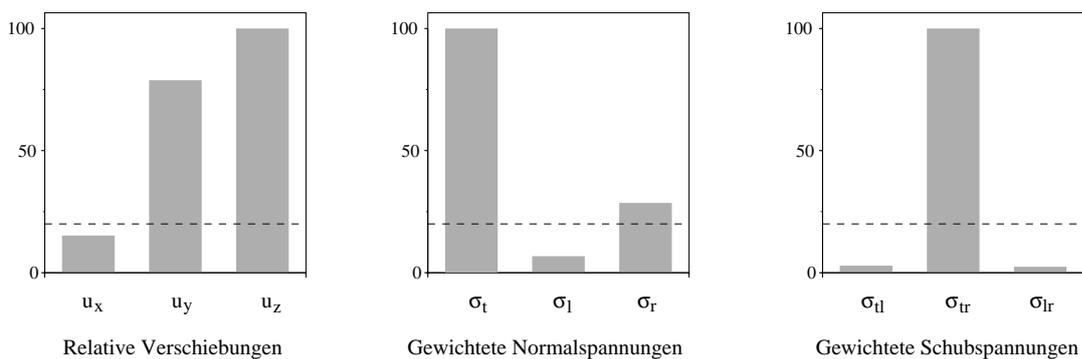


Abb. 7.5: Gewichtete Spannungen und Verschiebungen

Nimmt man weiter an, daß nur diejenigen Spannungen und Verschiebungen maßgeblich die Trocknungsqualität beeinflussen, deren Wichtigkeit über 20% liegt (gestrichelte Linie in Abb. 7.5), so läßt sich die Sensitivitätsmatrix wie in Abb. 7.6 auf fünf Zeilen reduzieren.

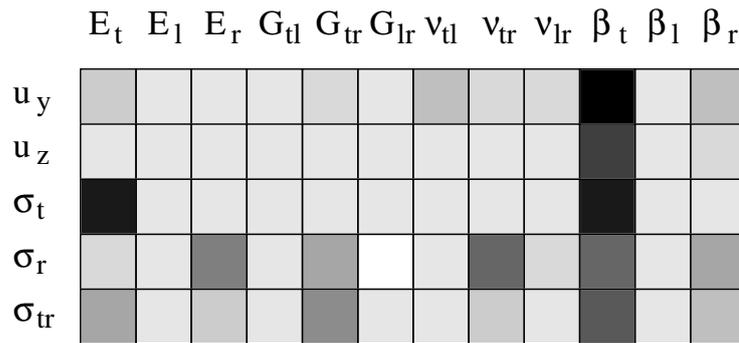


Abb. 7.6: Erste Reduktion der Sensitivitätsmatrix

Werden auch in dieser Matrix nur die Komponenten berücksichtigt, deren Sensitivität über 20% beträgt, so stellt man fest, daß alle Parameter mit dem Index "l" (Faserlängsrichtung) verschwinden. Es scheint also in erster Näherung zulässig zu sein, die Schnittholztrocknung als ein ebenes Problem aufzufassen.

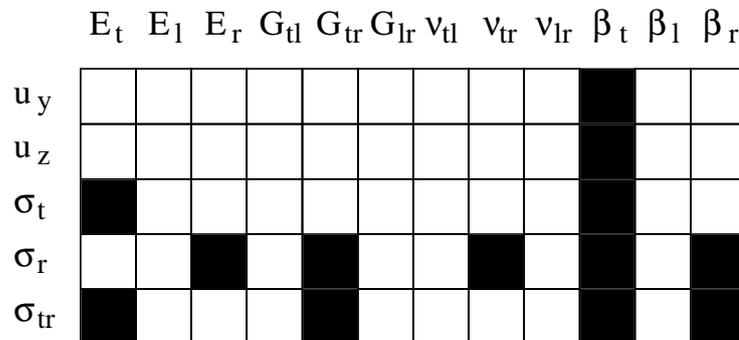


Abb. 7.7: Zweite Reduktion der Sensitivitätsmatrix

7.2 Eindimensionales, phänomenologisches Ersatzmodell

Durch Parallelschalten von drei der in Abb. 6.9 vorgestellten einachsigen Werkstoffmodelle werden die unterschiedlichen Schichten eines zu trocknenden Brettes nachgebildet. Analog zu diesem in Abb. 7.8 zu sehenden phänomenologischen Ersatzmodell wird in dem Programmsystem SCILAB unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.25) - (6.30) ein numerisches Modell erstellt. Für die einzelnen Schichten können unterschiedliche Feuchten vorgegeben werden. Aufgrund der daraus resultierenden unterschiedlichen Quellung bzw. Schwindung ergeben sich Spannungen und Verformungen innerhalb des Schichtverbundes, deren zeitlicher Verlauf berechnet werden kann.

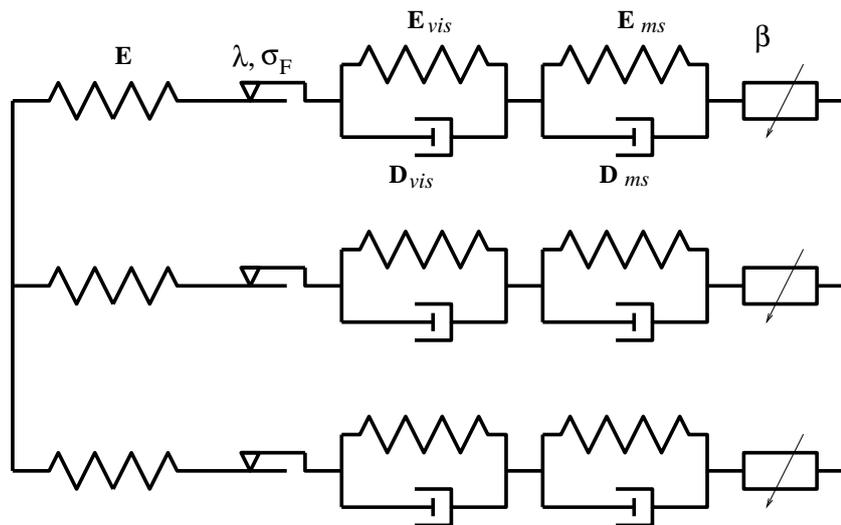


Abb. 7.8: Dreilagiges, einachsiges Modell für ein zu trocknendes Brett

Ein eindimensionales Modell ist zwar nicht in der Lage ist, die komplexen Spannungsverhältnisse in einem anisotropen Kontinuum widerzuspiegeln und kann daher nur den Charakter eines stark vereinfachten Beispiels zur abstrakten Veranschaulichung qualitativer Effekte haben. Der Vorteil liegt jedoch in der Möglichkeit, die Einflüsse der einzelnen Elemente des Werkstoffmodells auf das Gesamtverhalten getrennt darstellen und analysieren zu können.

Bei der Wahl der Modellparameter wurde zunächst ein Wert für den Elastizitätsmodul vorgegeben. Die anderen Werte wurden dann so angepaßt, daß sich die Spannungen und Spannungsverläufe ähnlich den in der Holztrocknungspraxis beobachteten ergeben. Die Angabe von Maßeinheiten in diesem qualitativen Beispiel soll die Dimensionsanalyse erleichtern.

Elastizität	$E_0 = 1000 \text{ MPa}$	$E = E_0 (1 - 0.5) \frac{X}{0.3}$
Viskoelastizität	$E_{vis} = 1 E$	$D_{vis} = 10 \text{ MPa h}$
Mechanosorptives Kriechen	$E_{ms} = 0.5 E$	$D_{ms} = 0.1 \text{ MPa}$
Plastizität	$\sigma_F = 3 \text{ MPa}$	
Schwindung	$\beta = 0.1$	

Unterwirft man dieses "Brett" nun dem in Abb. 7.9 unten abgebildeten Trocknungsverlauf, so erhält man die darüber abgebildeten Spannungen.

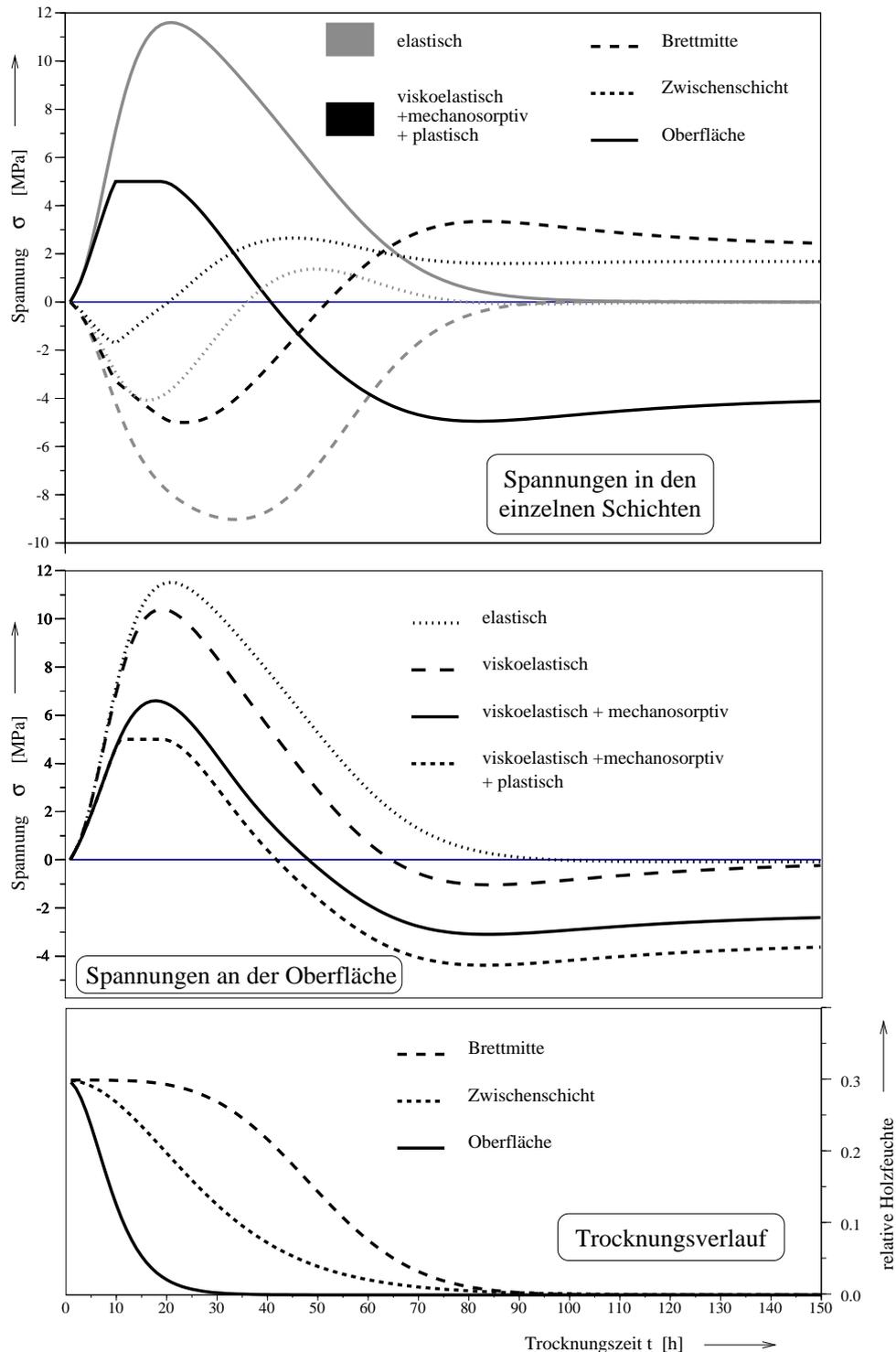


Abb. 7.9: Trocknungsspannungen in einem dreilagigen, einachsigen Modell

Wird ausschließlich die elastische Komponente des Modells betrachtet (s. Abb. 7.9, Oben), so ergeben sich hohe Zugspannungen in der Außenschicht und etwas niedrigere Druckspannungen im Inneren. Nach Beendigung des Trocknungsvorganges bleiben keine Eigenspan-

nungen zurück. Außerdem tritt keine aus Experimenten bekannte Spannungsumkehr auf, bei der in der Außenschicht Druck und in der Innenschicht Zug vorherrschen.

Durch das Hinzufügen von Viskoelastizität werden die Spannungen auf rund 4 MPa reduziert und es tritt eine kurze Spannungsumkehr gegen Ende der Trocknung auf, die sich jedoch schnell wieder abbaut. Erst wenn auch Plastizität und mechanosorptives Kriechen zugelassen werden (Abb. 7.9, Mitte), kann schon nach etwa der halben Trocknungszeit eine dauerhafte Spannungsumkehr von annähernd gleicher Größenordnung wie die Anfangsspannungen beobachtet werden. Aufgrund der Wahl der Parameter ist die Hauptursache dieser dargestellten Spannungsumkehr jedoch nicht die Plastizität, sondern das mechanosorptive Kriechen.

7.3 Beispielrechnung auf FE-Basis

Den Abschluß dieses Kapitels über die Holz Trocknung soll eine Beispielrechnung bilden, die auf Basis der Methode der Finiten Elemente durchgeführt wurde. Da es in ANSYS nicht möglich ist, orthotrope Viskoelastizität oder mechanosorptives Kriechen zu berücksichtigen, wurde dazu das Programmsystem MARC [91] verwendet. Die Grundlagen dieses Rechenmodells wurden in intensiver Zusammenarbeit mehrerer Institute im Rahmen eines DFG-Forschungsthemas [40] entwickelt. Es beinhaltet:

- Die Berechnung des Feuchtetransportes und der Feuchteprofile innerhalb eines zu trocknenden Brettes. Die Brettgeometrie, die Anfangsfeuchte und ein Trocknungsplan mit dem zeitlichen Verlauf der Prozeßparameter Temperatur und Luftfeuchte können vorgegeben werden.
- Die Berechnung des Spannungs- und Verformungsverlaufes unter Berücksichtigung von orthotropem, viskoelastischem, plastischem und mechanosorptivem Materialverhalten mit teilweise feuchteabhängigen Parametern.
- Die Darstellung von während und nach der Trocknung entnommenen Mittenschnitt- oder Gabelproben, die in der Praxis zur Beurteilung der Trocknungsqualität herangezogen werden.

Die Programmstruktur kann dem Abschlußbericht [40] entnommen werden und ist im Anhang (Abb. A.2) beigelegt. Ein Aufruf benötigte etwa 25 Minuten Rechenzeit auf einer CPU der an der TU Dresden vorhandenen Cray Origin 2000. Auf eine detailliertere Beschreibung des Programmablaufes, die sich auch mit der inneren Struktur des Programmpaketes MARC und der darin verwendeten Algorithmen und Materialmodelle befassen müßte, soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Die Materialparameter, die letztlich für die Beispielrechnung verwendet wurden, haben sich nach einem längeren Iterationsprozeß sowohl aus eigenen Experimenten als auch aus diversen Literaturquellen entlehnten Werten ergeben. Da es das Ziel dieses Forschungsvorhabens war, unterschiedliche Trocknungspläne zu vergleichen und Hinweise für deren

Optimierung zu erhalten, mußten die Parameter im Hinblick auf die vorhandenen Ergebnisse von Probetrocknungen “angepaßt“ werden, die ihrerseits nicht alle an dem gleichen Holz und von der gleichen Versuchsperson am gleichen Ort und im gleichen Trockner durchgeführt wurden. Eine nicht unwesentliche Rolle kommt dabei auch denjenigen Parametern zu, die im Hinblick auf die Konvergenz der Berechnungsalgorithmen innerhalb des Programmsystems MARC notwendig waren, da auch hier ein anisotrop-viskoelastisch-mechanosorptiv-plastisches Materialverhalten nicht standardmäßig vorgesehen ist. Diese Parameter können damit nicht als eigentliche Materialparameter angesehen werden und werden deshalb in der vorliegenden Arbeit nicht aufgelistet.

Der Vergleich der durchgeführten Simulationsrechnungen mit den vorhandenen Ergebnissen von Probetrocknungen zeigte eine im allgemeinen gute Übereinstimmung hinsichtlich der resultierenden Trocknungsqualität.

Als Beispiel soll die Trocknung eines Brettes mit einem Querschnitt von $100 \times 50 \text{ mm}^2$ und einer Anfangsfeuchte von $X = 22\%$ über einen Zeitraum von 190h simuliert werden. Um den Einfluß der Anisotropie zu verdeutlichen, wird angenommen, daß die zugehörige Wuchsachse sowohl in x - als auch in y -Richtung um jeweils 80 mm zur Brettmitte versetzt sei. Der verwendete Trocknungsplan, der aus einer tatsächlich durchgeführten Probetrocknung stammt, kann der Abb. 7.10 entnommen werden.

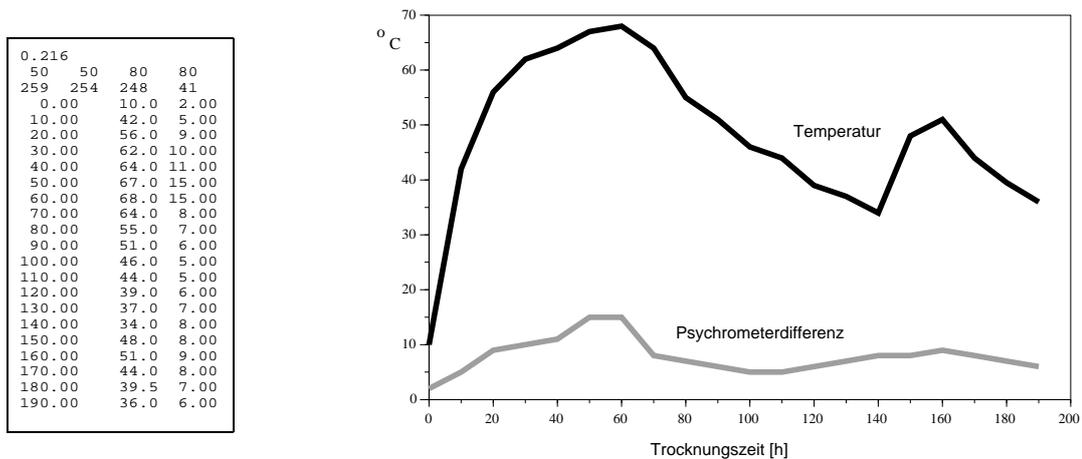


Abb. 7.10: Verwendeter Trocknungsplan.

Daraus ergibt sich der in Abb. 7.11 dargestellte Feuchteverlauf in den einzelnen Schichten des Brettquerschnittes.

Die anschließende mechanische Nachlaufrechnung liefert den zeitlichen Verlauf der Trocknungsspannungen (Abb. 7.12). Deutlich erkennbar ist die etwa bei der Hälfte der Trocknungszeit auftretende Spannungsumkehr der äußeren Schicht.

In den weiteren Abbildungen werden dann jeweils die Ergebnisse der abgeschlossenen Trocknung (nach 190h) mit denen aus dem ersten Drittel der Trocknungszeit (nach 60h) verglichen.

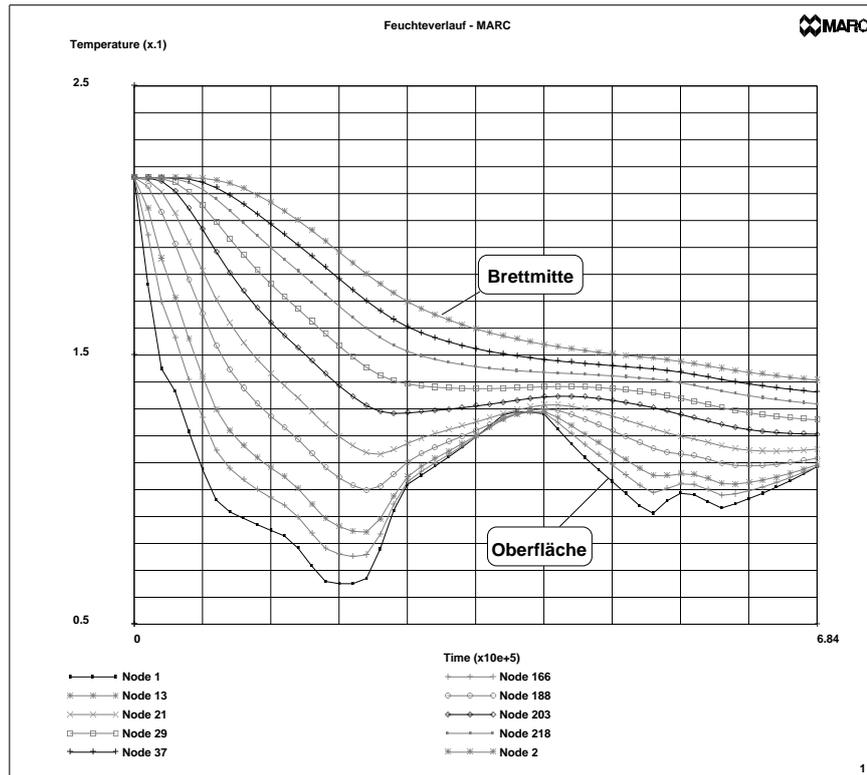


Abb. 7.11: Berechneter Feuchteverlauf

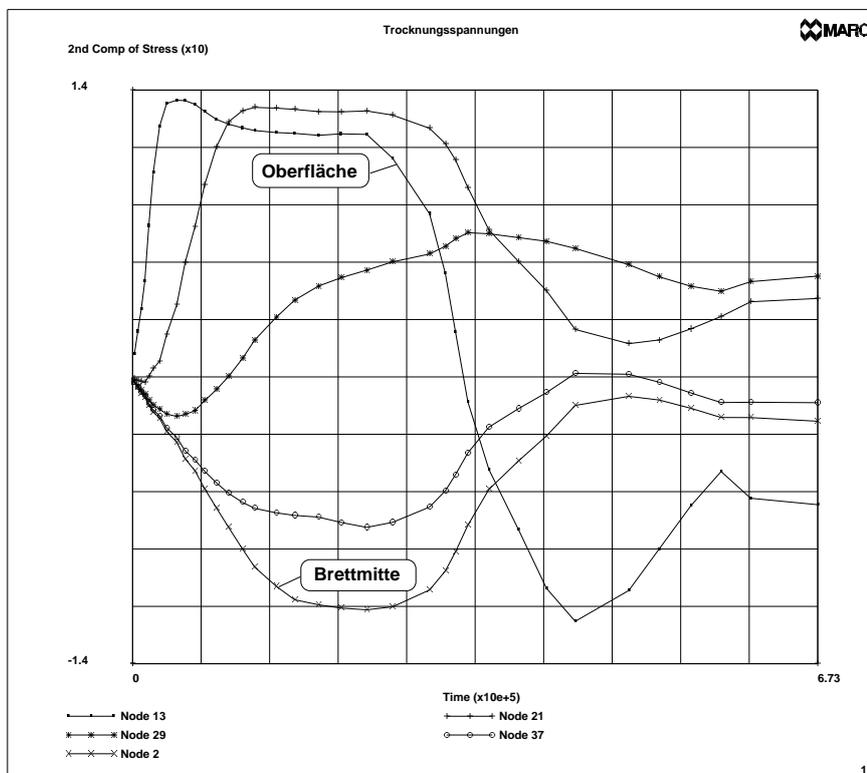


Abb. 7.12: Berechneter Spannungsverlauf

In den Abb. 7.13 und 7.14 sind die Hauptspannungen zu den unterschiedlichen Zeitpunkten gegenübergestellt. Während zum Zeitpunkt $t=60\text{h}$ äußere Zugspannungen den Druckspannungen im Kern das Gleichgewicht halten, ist am Ende der Trocknung zu erkennen, daß sich unter der Oberfläche Zonen mit hohen Zugspannungen ausgebildet haben, während an der Oberfläche selbst Druckspannungen vorliegen. Im Kern des Brettes herrschen nur noch schwache Druckspannungen.

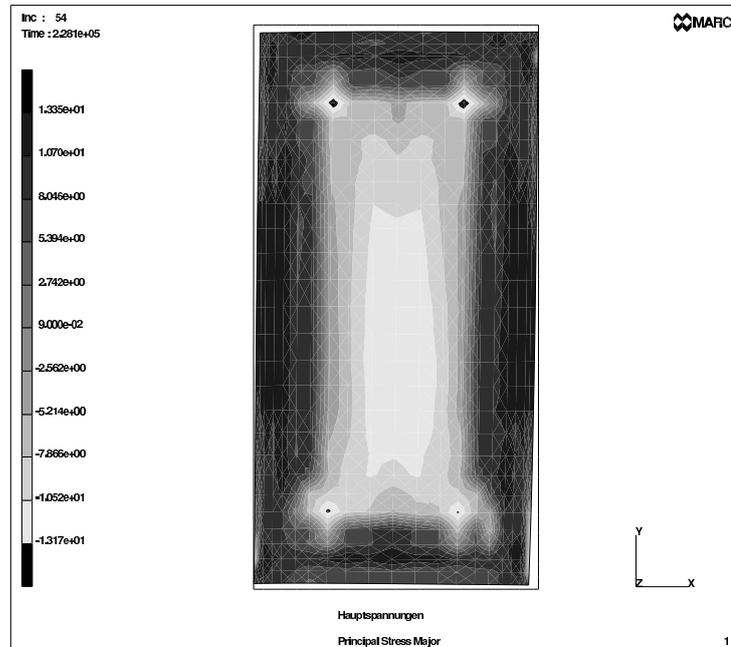


Abb. 7.13: Hauptspannungen zu Beginn der Trocknung (nach 60h)

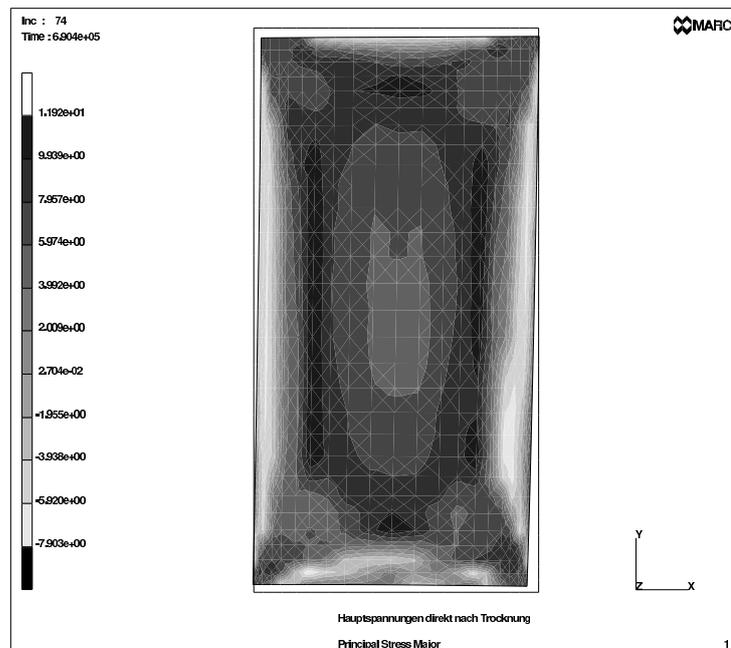


Abb. 7.14: Hauptspannungen am Ende der Trocknung (nach 190h)

Die zugehörigen Verschiebungen sind in den Abb. 7.15 und 7.16 dargestellt. Während im ersten Trocknungsabschnitt die Verschiebungen im wesentlichen von den starken Feuchtegradienten bestimmt werden, äußert sich gegen Ende der Trocknung die Anisotropie des Holzes in Form von elliptischen Linien gleicher Verschiebung, deren längere Hauptachsen sich in Richtung auf die außerhalb des Brettes gelegene Wuchsachse hin orientieren.

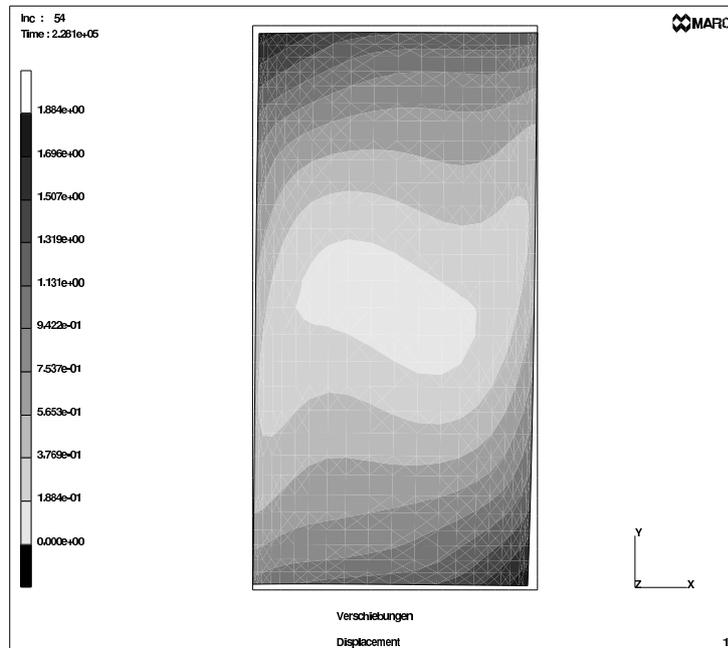


Abb. 7.15: Verschiebungen zu Beginn der Trocknung (nach 60h)

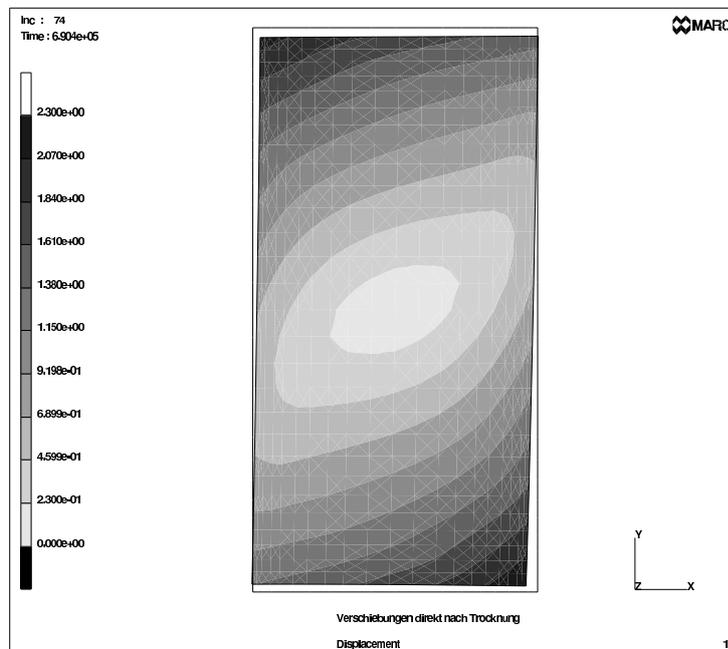


Abb. 7.16: Verschiebungen am Ende der Trocknung (nach 190h)

Die Abbildungen 7.17 und 7.18 zeigen, wie die Trocknungsspannungen durch das Verformungsverhalten von Gabelproben sichtbar gemacht werden können. Während sich im ersten Drittel der Trocknung die Gabel nach außen biegt, führt die Spannungsumkehr im letzten Trocknungsabschnitt zu einer Verformung nach Innen. Wegen der verschobenen Wuchsachse ist diese Verformung nicht symmetrisch.

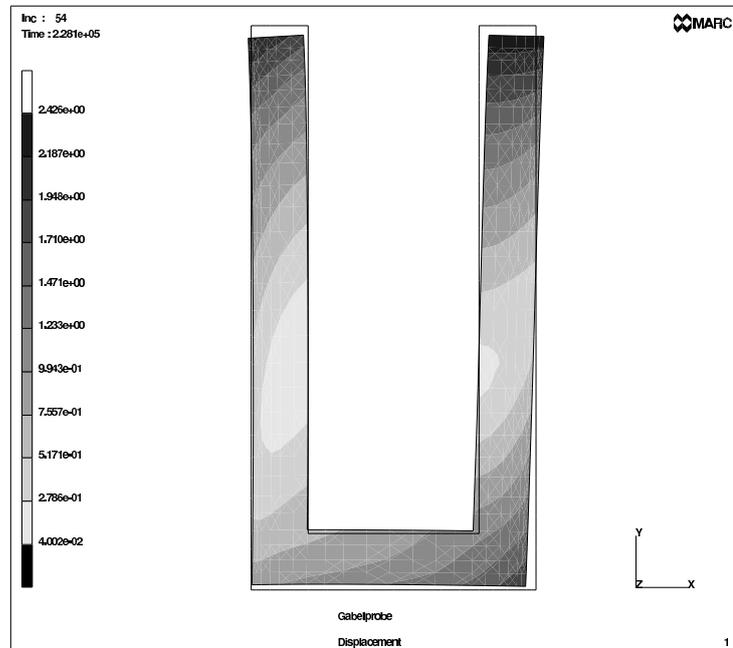


Abb. 7.17: Gabelprobe zu Beginn der Trocknung (nach 60h)

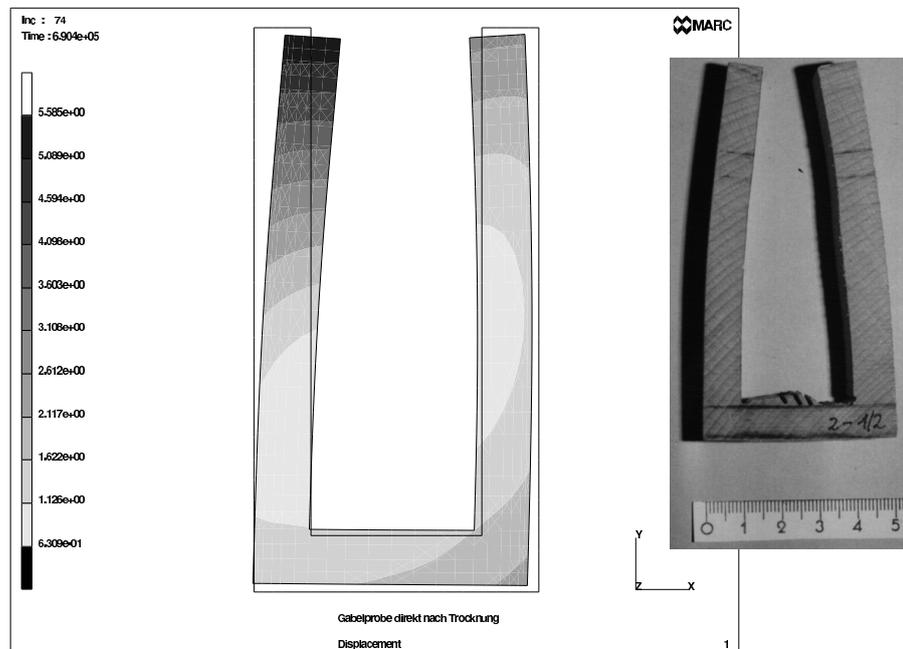


Abb. 7.18: Gabelprobe am Ende der Trocknung (nach 190h)

Zum Vergleich wird eine ähnliche Trocknungssimulation unter Verwendung eines rein elastischen Materialgesetzes durchgeführt. Die in den Abbildungen 7.19 und 7.20 dargestellten Ergebnisse zeigen deutlich höhere Spannungen als in Abb. 7.12. Diese Spannungen verschwinden jedoch vollständig, sobald die uniforme Endfeuchte erreicht wird. Lediglich bei einer der Zwischenschichten tritt zeitweise eine leichte Spannungsumkehr auf (vergl. auch Kap.7.2).

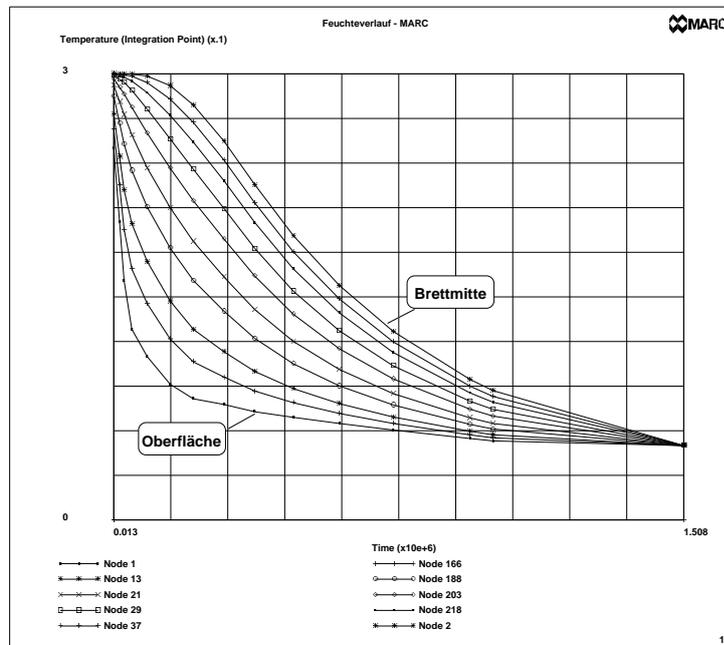


Abb. 7.19: Angenommener Feuchteverlauf für elastische Rechnung

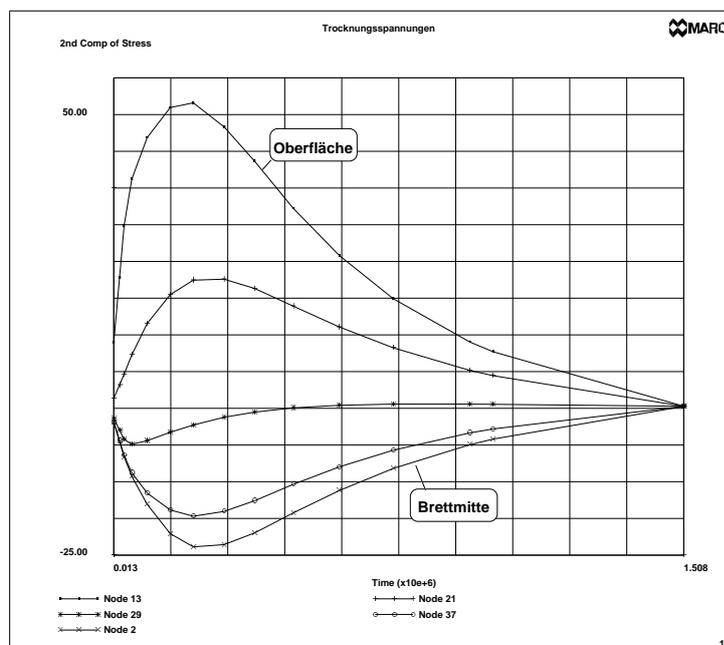


Abb. 7.20: Spannungsverlauf bei rein elastischer Rechnung

8 Zusammenfassung und Ausblick

Holz ist gleichzeitig ein alter wie auch ein sehr moderner Werkstoff, der in den unterschiedlichsten Bereichen eingesetzt werden kann und eingesetzt wird. Die Beschreibung seines mechanischen Verhaltens stellt eine besondere Herausforderung dar, weil es fast alle für den Ingenieur “unangenehmen” Eigenschaften in sich vereinigt. Streng genommen muß Holz als anisotroper, inhomogener, poröser Verbundwerkstoff mit inelastischem Materialverhalten und feuchteabhängigen Parametern aufgefaßt werden. Als zusätzliche Schwierigkeit kommt hinzu, daß die Eigenschaften aufgrund der Entstehung als gewachsenes, lebendiges Material starken Streuungen, selbst innerhalb von ein und derselben Spezies, unterliegen.

Die Lösung dieser Aufgabe scheint nur möglich, wenn man sich ihr schrittweise und auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen nähert. Die vorliegende Arbeit bedient sich dazu der Methoden der Kontinuumsmechanik. Ausgehend von der obersten Strukturebene, der mit dem bloßen Auge erkennbaren Makrostruktur des Holzes, werden die Auswirkungen der Anisotropie untersucht und beschrieben. Dabei wird zunächst ein rein elastisches Materialverhalten angenommen. Durch den Einsatz moderner Rechentechnik gelingt die Analyse und Visualisierung der auftretenden Phänomene.

Mit Hilfe der Identifikationstheorie wird gezeigt, wie der experimentelle Aufwand zur Bestimmung der schon auf dieser Abstraktionsebene zahlreichen Materialparameter reduziert werden kann. Dazu werden Sensitivitätsanalysen auf Basis von Finite-Element-Modellen eingesetzt, bei denen die Belastungsfälle Zug, Torsion und Biegung an unterschiedlichen Probekörpern simuliert werden. Ausführlich werden die Möglichkeiten besprochen, die die Modalanalyse dünner Platten aus Holz bietet.

Bei der daran anschließenden Untersuchung der inelastischen und rheonomen Phänomene im Zusammenhang mit Holz wird besonderes Augenmerk auf die Modellbildung gelegt, die, abgestimmt auf den jeweiligen Anwendungszweck, zu unterschiedlichen Minimalmodellen führen kann. Dabei wird die Anisotropie weitgehend vernachlässigt, da die Zahl der unbekanntes aber benötigten Parameter in diesem Fall sehr groß ist und eine übersichtliche Darstellung verhindern würde. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, daß die Grundannahmen der Plastizitäts- und Viskoelastizitätstheorie, wie z.B. Abspaltung des hydrostatischen Anteils aus dem Spannungstensor, nicht ohne weiteres auf einen so ausgeprägt anisotropen Körper übertragen werden können.

Nach der Beschreibung der einzelnen Komponenten des erweiterten Materialmodells, wird seine Anwendbarkeit anhand des komplexen Prozesses der Holztrocknung demonstriert. Dabei läßt sich eine gute Übereinstimmung mit durchgeführten Probetrocknungen erzielen.

Eine Aufgabe für die Zukunft wäre nun der Einsatz der hier beschriebenen Identifikationsverfahren an verschiedenen Holzarten, um eine umfassende Datenbank aller benötigten Materialparameter zu erstellen.

Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit fehlerfreiem Vollholz. Zum einen bereiten aber gerade die Holzfehler in der Praxis große Probleme, zum anderen sind auch die Holzwerkstoffe von besonderem industriellen Interesse. Es ist allerdings anzunehmen, daß sich viele der hier getroffenen Feststellungen grundsätzlich auch auf diese Gebiete übertragen lassen.

Als nächster Schritt für eine bessere Beschreibung des Holzes sollten auch die Mikro- und Nanostruktur bei der Modellbildung berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit wird zwar die Mikrostruktur intuitiv erfaßt, äußert sich aber nicht in einer expliziten Formulierung. Es erscheint denkbar, daß die Lösung einiger der noch ungeklärten Phänomene auf der Ebene einzelner Fasern und Zellverbände oder gar der chemischen Holzkomponenten Cellulose, Hemicellulose und Lignin zu finden ist. Insbesondere für das Verständnis der Plastizität und des Bruchverhaltens von Holz wird eine genauere Berücksichtigung der Mikro- und Nanostruktur unerlässlich sein.

Literatur

- [1] AHRENS, R.: *Innere Variablen in linear-viskoelastischen Schwingungssystemen*, TU Braunschweig, Dissertation, 1992. – VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Bd. 181
- [2] ALBERS, K.: *Querdehnungs- und Gleitzahlen sowie Schub- und Scherfestigkeiten von Holzwerkstoffen*, Hamburg, Dissertation, 1970
- [3] ARCHER, R.R.: *Growth stresses and strains in trees*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1987
- [4] ARMSTRONG, L.D. ; CHRISTENSEN, G.N.: Influence of moisture changes on deformation of wood under stress. In: *Nature* 191 (1961), Nr. 4791, S. 869–870
- [5] ARMSTRONG, L.D. ; KINGSTON, R.S.T.: Effect of moisture content changes on creep of wood. In: *Nature* 185 (1960), Nr. 4716, S. 862–863
- [6] ARMSTRONG, L.D. ; KINGSTON, R.S.T.: The Effect of moisture content changes on the deformation of wood under stress. In: *Australian J. of Appl. Science* 13 (1960), Nr. 4, S. 257–276
- [7] BANDYOPADHYAY, N. ; ARCHER, R.R.: Relief of growth stresses in planks. In: *Holzfor-schung* 33 (1979), S. 43–46
- [8] BECKER, K.: *Dehnungs-, Querdehnungs- und Gleitzahlen von zweilagigem Fichtenholz*, Braunschweig, Dissertation, 1974
- [9] BEHNKE, C. ; BERNATOWICZ, G. ; MILITZER, K.-E.: Drying Stresses in Sawn Timber determined experimentally and simulated with the program "Profil". In: *Proceedings of the "3rd IUFRO Drying Conference"*. Wien, 1992
- [10] BETTEN, J.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1987
- [11] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik. Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1993
- [12] BODIG, J. ; B.A.JAYNE: *Mechanics of wood and wood composites*. New York : Van Nostrand Reinhold Company, 1982
- [13] BOYD, J.D. ; SCHUSTER, K. B.: Treegrowth stresses IV: viscoelastic strain recovery. In: *Wood Sci. Technol.* 6 (1972), S. 95 –120
- [14] BRUNNER, R. (Hrsg.): *Die Schnittholztrocknung*. 5. Hannover : R. Brunner GmbH, 1987
- [15] CHENG, S. ; CHENG, C.C.: Relation between E , ν , G and invariants of the elastic coefficients for an orthotropic body. In: *Proceedings of the Winter Annual Meeting, Dallas* American Society of Mechanical Engineers, 1990, S. 63 – 65
- [16] CHLADNI, E.F.F.: *Die Akustik*. Leipzig : Breitkopf u. Härtel, 1802
- [17] COLLATZ, L.: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Berlin : Springer-Verlag, 1955

- [18] DADOURA, H.: *Parameter-Identifikation unter Anwendung der Empfindlichkeitstheorie und stochastischer Optimierungsalgorithmen*, TU Dresden, Dissertation, 1987
- [19] DIN, Deutsches Institut für Normung e. (Hrsg.): *Normen über Holz*. Berlin, Köln : Beuth, 1992 (DIN-Taschenbuch 31)
- [20] FELIX, S. ; MORLIER, P.: Modelling of Stresses and Strains in a Piece of Wood Under Drying. In: *Holzforschung* 46 (1992), S. 369–377
- [21] FISCHER, R. ; SCHUSTER, C. Zur Qualitätsentstehung spanend erzeugter Holzoberflächen. Schnittflächen unter dem Rasterelektronenmikroskop. Lehrstuhl für Holz- und Faserwerkstofftechnik, Fakultät Maschinenwesen, TU Dresden
- [22] FLETCHER, N.H. ; ROSSING, T.D.: *The Physics of Musical Instruments*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1991
- [23] FOSTER, C.G.: Damping and Poisson factor behaviour in timber considered as an orthotropic material, Part I: The Loss Factor. In: *J Sound Vibration* 158 (1992), S. 405–425
- [24] FOSTER, C.G.: Damping and Poisson factor behaviour in timber considered as an orthotropic material, Part II: The Poisson Factor. In: *J Sound Vibration* 158 (1992), S. 427–446
- [25] FRITZEN, C. P. ; ZHU, S.: Updating of Finite Element Models by Means of Measured Information. In: *Computers & Structures* 40 (1991), Nr. 2, S. 475–486
- [26] GÖHRE, K.: *Werkstoff Holz, Technologische Eigenschaften und Vergütung*. Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1961
- [27] GILLES, Marc G.: *Caractérisation en flexion quasi-static et dynamique d'un matériau thermo-hygro-visco-élastique: le bois*. Nancy (France), Institut National Polytechnique de Lorraine (I.N.P.L), Thèse, 1990
- [28] GILLIS, P.P. ; HSU, C.H.: An elastic plastic theorie of longitudinal growth stresses. In: *Wood Sci. Technol.* 13 (1979), S. 97 –115
- [29] GÖLDNER, H. (Hrsg.): *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre*. Bd. 2. Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1985
- [30] ГОНТКЕВИЧ, В. С.: Собственные колебания пластинок и оболочек. (*Eigen-schwingungen von Platten und Schalen.*). Киев (Kiev) : Наукова думка, 1964
- [31] GOOSSENS, M. ; MITTELBACH, F. ; SAMARIN, A.: *Der L^AT_EX-Begleiter*. Bonn, Paris, Reading : Addison-Wesley, 1994
- [32] GORDON, J.E.: *The new science of strong materials*. London : Penguin Books, 1968
- [33] GORDON, J.E.: *Strukturen unter Stress. Mechanische Belastbarkeit in Natur und Technik*. Heidelberg : Spektrum der Wissenschaft, 1989
- [34] GRESSEL, P.: Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen. In: *Bauen mit Holz* 4 (1984), S. 216 –223

- [35] GRIMSEL, M.: Describing the Behaviour of Wood by Means of Continuum Mechanics and FEM. In: *Proceedings of the Symposium "Wood Structure and Properties '94"*. Zvolen (Slovakia), September 1994, S. 293 – 297
- [36] GRIMSEL, M.: Identifikation von Materialparametern für Holz. In: *Identifikation mechanischer Systeme. Vorträge zum 6. Problemseminar am 2.-3. Mai 1995 in Schmochwitz* TU Dresden, Fakultät Maschinenwesen, 1995
- [37] GROSSMANN, P.U.A.: Requirements for a Model that Exhibits Mechano- Sorptive Behaviour. In: *Wood Sci. Technol.* 10 (1976), S. 163–168
- [38] HANHIJÄRVI, A.: *Modelling of creep deformation mechanisms in wood*, Helsinki University of Technology, Dissertation, 1995. – VTT Publications 231
- [39] HARDTKE, H.-J.: *Meßwertverarbeitung und Identifikation Maschinendynamischer Systeme*, TU Dresden, Dissertation B, 1988
- [40] HARDTKE, H.-J. [u. a.] . Entwicklung und Identifikation eines kontinuumsmechanischen Modells für die numerische Simulation der Trocknung von Schnittholz. Abschlußbericht DFG-Thema Ha 2075/3-2. 1997
- [41] HARDTKE, H.-J. ; GRIMSEL, M.: Identifikation von Materialparametern für Holz. In: *Proceedings of the ICIAM 95. ZAMM Supplement 4: Applied Sciences, especially Mechanics*. Berlin : Akademie Verlag, 1996
- [42] HARDTKE, H.-J. ; GRIMSEL, M. ; MILITZER, K.-E.: Drying stresses in wood and the demands of Continuum Mechanics. In: *Proceedings of the "5th International IUFRO Wood Drying Conference"*. Quebec City (Canada), August 1996
- [43] HAUSSÜHL, S.: *Kristallphysik*. Weinheim : Physik Verlag GmbH, 1983
- [44] HEARMON, R.F.S: The fundamental frequency of vibration of rectangular wood and plywood plates. In: *Proc.Phys.Soc.of London* (1946), S. 58 – 78
- [45] HEARMON, R.F.S.: The elastic and plastic properties of natural wood. In: MEREDITH, R. (Hrsg.): *Mechanical properties of wood and paper*. Amsterdam, 1953, S. 19–47
- [46] HEARMON, R.F.S.: *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*. Oxford University Press, 1961
- [47] HEARMON, R.F.S. ; PATON, J.M.: Moisture content changes and creep of wood. In: *Forest Products Journal* 14 (1964), Nr. 8, S. 357–359
- [48] HEYMANN, J. ; LINGENER, A.: *Experimentelle Festkörpermechanik*. Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1986
- [49] HOFFMEYER, P. ; R.W.DAVIDSON: Mechano-sorptive creep mechanism of wood in compression and bending. In: *Wood Sci. Technol.* 23 (1989), S. 215–227
- [50] HÖRIG, H.: Anwendung der Elastizitätstheorie anisotroper Körper auf Messungen an Holz. In: *Ing.-Arch.* 6 (1935), S. 8–14

- [51] HÖRIG, H.: Berechnung der Gleitzahlen s_{44} , s_{55} , s_{66} aus den Verdrehungsmessungen von Stäben mit rechteckigen Querschnitten bei rhombischer Symmetrie. In: *Ing.-Arch.* 7 (1936), S. 165–170
- [52] HÖRIG, H.: Über Mittelwertkörper elastisch anisotroper Körper und deren Anwendung auf Holz. In: *Ing. Arch.* 8 (1937), S. 174 – 182
- [53] HÖRIG, H.: Über die unmittelbare Messung der Gleitzahlen s_{44} , s_{55} , s_{66} bei Stoffen von rhombischer Symmetrie und geringer Starrheit. In: *Ann. Phys.* 43 (1943), S. 285–295
- [54] HUET, C. ; NAVI, P.: Multiparabolic multitransition model for thermo-viscoelastic behaviour of wood. In: *Proceedings of the Winter Annual Meeting, Dallas* American Society of Mechanical Engineers, 1990, S. 17 – 24
- [55] HUFENBACH, W. ; LUSTIG, V.: Schubmodulermittlung an Rotbuche in Abhängigkeit von Orientierung und Holzfeuchte (12%) und der Orientierung. 1997. – Prüfbericht 16/97, TU Dresden, Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik
- [56] HUFENBACH, W. ; LUSTIG, V.: Schubmodulermittlung an Rotbuche in Abhängigkeit von Orientierung und Holzfeuchte (18%). 1997. – Prüfbericht 08/97, TU Dresden, Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik
- [57] HUNT, D.G.: Creep trajectories for beech during moisture changes under load. In: *J. of Material Science* 19 (1984), S. 1456–1467
- [58] HUNT, D.G.: Linearity and non-linearity in mechano-sorptive creep of softwood in compression and bending. In: *Wood Sci. Technol.* 23 (1989), S. 323–333
- [59] HUNT, D.G.: Two classical theories combined to explain anomalies in wood behaviour. In: *J. of Material Science Letters* 8 (1989), S. 1474–1476
- [60] HUNT, D.G. ; SHELTON, C.F.: Stable state creep limit of softwood. In: *J. Material Science Letters* 6 (1987), S. 353–354
- [61] INRIA. Rocquencourt (France): *SCILAB: a free CACSD Package.* 1997
- [62] JERONIMIDIS, G. ; ATKINS, A. G.: Mechanics of biological materials and structures: Nature's lessons for the engineer. In: *Proc. Instn. Mech. Engrs* 209 (1995), S. 221 – 235. – Review Paper
- [63] JOYET, P. ; LAGIERE, P. ; GUITARD, D.: Creep behavior under varying moisture content conditions. In: *3rd IUFRO Drying Conference.* Wien, 1992
- [64] KÜBLER, H.: Studien über Wachstumsspannungen des Holzes, Erste Mitteilung: Die Ursache der Wachstumsspannungen und die Spannungen quer zur Faserrichtung. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 17 (1959), S. 1–9
- [65] KÜBLER, H.: Studien über Wachstumsspannungen des Holzes, Zweite Mitteilung: Die Spannungen in Faserrichtung. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 17 (1959), S. 44–54
- [66] KELLEY, S.S. [u. a.] : Relaxation behaviour of the amorphous components of wood. In: *J. of Material Science* 27 (1987), S. 617–624

- [67] KEYLWERTH, R.: *Die anisotrope Elastizität des Holzes und der Lagenhölzer*. VDI-Forschungsheft 430. Düsseldorf : Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH, 1951
- [68] KIRCHHOFF, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *J. für Math.* 40 (1850), S. 5 – 51
- [69] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Mannheim, Wien, Zürich : B. I. Wissenschaftsverlag, 1989. – B. I. Hochschultaschenbücher Bd.197
- [70] KNÜPFER, W ; FISCHER, R ; REGENSBURGER, K.: Orientierende Versuche zur Deformation beim Schneiden von Holz. In: *Holztechnologie* 21 (1980), S. 12ff
- [71] KOLLMANN, F.: *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe*. Bd. 1. Berlin Göttingen Heidelberg : Springer Verlag, 1951
- [72] KOLLMANN, F.: Über die Abhängigkeit einiger mechanischer Eigenschaften der Hölzer von der Zeit, von Kerben und von der Temperatur. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 5 (1952), S. 187–197
- [73] KOLLMANN, F.: Rheologie und Strukturfestigkeit von Holz. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 3 (1961), S. 73–80
- [74] KOLLMANN, F.: Über die Beziehungen zwischen rheologischen und Sorptionseigenschaften (am Beispiel von Holz). In: *Rheologica Acta* 4 (1964), S. 260–270
- [75] KOLLMANN, F.: *Verformung und Bruchgeschehen bei Holz als einem anisotropen, inhomogenen, porigen Festkörper*. VDI-Forschungsheft 520. Düsseldorf : Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH, 1967
- [76] KOLLMANN, F. ; CÔTÉ, W.: *Principles of Wood Science and Technologie, I: Solid Wood*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1968
- [77] KOLLMANN, F. ; KRECH, H.: Dynamische Messungen der elastischen Holzeigenschaften und der Dämpfung. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 18 (1960), S. 41–54
- [78] KRABBE, E.: *Messungen von Gleit- und Dehnungszahlen an Holzstäben mit rechteckigen Querschnitten*, Hannover, Dissertation, 1961
- [79] KREISSIG, R.: *Einführung in die Plastizitätstheorie. Mit technischen Anwendungen*. Leipzig-Köln : Fachbuchverlag, 1992
- [80] KUBAT, D.G. ; SAMUELSSON, S. ; KLASON, C.: Stress Relaxation in Wood (Scots Pine veneer). In: *Journal Of Materials Science* 24 (1989), Nr. 10, S. 3541–3548
- [81] KURJATKO, S. ; ČUNDERLÍK, I.: Effect of Blue and Brown Stain on Spruce Wood Properties. In: *Proceedings of the Symposium "Wood Structure and Properties '94"*. Zvolen (Slovakia), September 1994, S. 17 – 24
- [82] LANGENDORF, G. ; SCHUSTER, E. ; WAGENFÜHR, R.: *Rohholz*. Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1961
- [83] LEICESTER, R.M.: A Rheological Model for Mechano-sorptive Deflection of Beams. In: *Wood Sci. Technol.* 5 (1971), S. 211–220

- [84] LEKHNITSKII, S.G.: *Theorie of elasticity of an anisotropic elastic body*. San Francisco CA : Holden Day, 1963
- [85] LEWIS, R.W. ; MORGAN, K. ; THOMAS, H.R.: The nonlinear modelling of drying-induced stresses in porous bodies, *Advances in Drying*. In: *Advances in Drying* 2 (1983), S. 233–268
- [86] LEWIS, R.W. ; MORGAN, K. ; THOMAS, H.R. ; STRADA, M.: Drying-induced stresses in porous bodies – An elastoviscoplastic model. In: *Computer Met. in Appl. Mech. and Eng.* 20 (1979), S. 291–301
- [87] LEWIS, R.W ; STRADA, M ; COMINI, G.: Drying-induced stresses in porous bodies. In: *Int. J. Num. Meth. Eng.* 11 (1977), S. 1175–1184
- [88] LÜHMANN, A. ; NIEMZ, P.: Theoretical and experimental reflections on stress origination and stress detection during wood drying. In: *Proceedings of the “3rd IUFRO Drying Conference“*, Wien, 1992, S. 367 – 373
- [89] MAITI, M ; ADAMS, S. F.: Isotropy at the center of a cylindrical wood pole. In: *Wood Sci. Technol.* 2 (1968), S. 44–45
- [90] MANGLER, R.: *Modellierung des Wärme- und Stofftransportes bei der Schnittholztrocknung*, TU Dresden, Inst. f. Festkörpermechanik, Ingenieurbeleg, 1996
- [91] MARC Analysis Research Corporation. Palo Alto, California: *The MARC Finite Element Program. Revision K.6.2*. 1996
- [92] MÅRTENSSON, A. ; S.THELANDERSSON: Effect of moisture and mechanical loading on wooden materials. In: *Wood Sci. Technol.* 24 (1990), S. 247–261
- [93] MCINTYRE, M.E. ; WOODHOUSE, J.: On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. In: *Acta metallurgica* 36 (1988), S. 1397–1416
- [94] MEHRABADI, M.M. ; COWIN, S.C.: Eigentensors of Linear Anisotropic Elastic Materials. In: *J.Mech.appl.Math* 43 (1990), S. 15 – 41
- [95] MORGAN, K. ; LEWIS, R.W. ; THOMAS, H.R.: Numerical modelling of drying-induced stresses in porous materials. In: MUJUMDAR, A.S. (Hrsg.): *Drying 80* Bd. 1. New York : Hemisphere Publ. Corp., 1980, S. 451–460
- [96] MUKUDAI, J. ; S.YATA: Modelling and simulation of viscoelastic behaviour (tensile strain) of wood under moisture change. In: *Wood Sci. Technol.* 20 (1986), S. 335–348
- [97] NADLER, K. ; CHOONG, E.T. ; WETZEL, P.M.: Mathematical modelling of the diffusion of water in wood during drying. In: *Wood and Fiber Sci. Madison* 17 (1985), S. 404 – 423
- [98] NEUHAUS, F.-H.: *Elastizitätszahlen von Fichtenholz in Abhängigkeit von der Holzfeuchtigkeit*, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, 1981. – Mitteilung Nr.81-8 des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau
- [99] NIEMZ, P.: Über einige Erkenntnisse zum Kriechverhalten von Vollholz. In: *Holztechnologie* 21 (1980), S. 195ff

- [100] NIEMZ, P.: Untersuchungen zum Einfluß des Klimas auf das Kriechverhalten von Vollholz. In: *Holztechnologie* 26 (1985), S. 151ff
- [101] NIEMZ, P.: *Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe*. Leinfelden-Echterdingen : DRW-Verlag, 1993
- [102] NIEMZ, P. ; HÄNSEL, A.: Zur Anwendung der Schallemissionsanalyse in der Holzwerkstoffforschung. Eine Literaturübersicht. In: *Holztechnologie* 28 (1987), S. 293ff
- [103] NOWACKI, W.: *Theorie des Kriechens - Lineare Viskoelastizität*. Wien : Deuticke, 1965
- [104] OHSAKO, Y. ; YAMADA, T.: Studies on viscoelastic properties and growth stresses in branch of BUNA wood. In: *Wood Res. Inst. Kyoto Bull.* 45 (1968), S. 36–45
- [105] ORMARSSON, S.: *A Finite Element Study of the Shape Stability of sawn Timber subjected to Moisture Variations*. Lund (Sweden) : Lund Institute of Technology, Report TVSM-3017, 1995
- [106] PAUFLER, P.: *Physikalische Kristallographie*. Berlin : Akademie Verlag, 1986
- [107] PERRÉ, P.: The Numerical Modelling of Physical and Mechanical Phenomena Involved in Wood Drying: an Excellent Tool for Assisting with the Study of New Processes. In: *5th International IUFRO Wood Drying Conference*. Quebec City (Canada), 13.-17. August 1996
- [108] PLATH, E.: Ein Beitrag zur Mechanik der Holzspanplatte. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 29 (1971), S. 377–382
- [109] POŽGAJ, A. ; CHOVANEC, D.: Wood Failure in Bending. In: *Proceedings of the Symposium "Wood Structure and Properties '94"*. Zvolen (Slovakia), September 1994, S. 35 – 48
- [110] PRAGER, W.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Basel, Stuttgart : Birkhäuser-Verlag, 1961
- [111] RABOTNOV, J.N. ; ILJUSCHIN, A.A.: *Methoden der Viskoelastizitätstheorie*. Leipzig : VEB Fachbuch-Verlag, 1970
- [112] RANTA-MAUNUS, A.: The Viscoelasticity of wood at Varying Moisture Content. In: *Wood Science and Technology* 9 (1975), S. 189–205
- [113] RAYLEIGH, J.W.S. L.: *The Theory of Sound*. New York : Macmillan, 1894
- [114] RITZ, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. In: *J Reine und Angewandte Mathematik* 135 (1908), S. 1 – 61
- [115] ROUGER, F.: *Application des méthodes numériques aux problèmes d'identification des lois de comportements du matériau bois*, Université de Technologie Compiègne, Thèse, 1988
- [116] SAINT-VENANT, A.J.C.B. d.: Mémoire sur la torsion des prismes. In: *Mém.prés. par div. savants, Paris* 14 (1856)
- [117] SALIN, J.-G.: Numerical prediction of checking during timber drying and a new mechano-sorptive creep model. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 50 (1992), S. 195–200

- [118] SAS IP inc. Canonsburg, PA: *ANSYS User's Manual. Release 5.3.* 1996
- [119] SCHMIDT, R. ; NIEMZ, P. ; LÜHMANN, A.: Berechnung von Trocknungsspannungen in Holz mittels der Methode der Finiten Elemente. In: *HOB* 5 (1993), S. 64–70
- [120] SCHNEIDER, H.: Untersuchungen über das Verhalten von Holzwerkstoffplatten bei Stoßbeanspruchung sowie über ihren dynamischen Elastizitäts- und Schubmodul. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 24 (1966), S. 41–52
- [121] SEMSCH, M. ; GRIMSEL, M.: Drying stresses in wood and the Finite Elements Method. In: OLEJNICZAK, P. (Hrsg.): *Proceedings of the International Seminar "Drying Stresses In Wood"*. Poznan (Poland), June 1995
- [122] SIAU, J.F.: *Transport Processes in Wood.* Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1984
- [123] SLIKER, A ; YU., Y.: Elastic constants for Hardwoods measured from plate and tension tests. In: *Wood and fibre science* 25 (1993), S. 8 – 22
- [124] STÖCKMANN, V.: *Dauerschwingbeanspruchung von Hochpolymeren im Zugbereich auf Grundlage der Spannungsrelaxation am Beispiel Holz*, TU Hamburg, Dissertation, 1968
- [125] SURREL, Y.: A new description of the tensors of elasticity based upon irreducible representations. In: *European Journal of Mechanics A / Solids* 12 (1993), S. 219 –235
- [126] SZABO, I.: *Höhere Technische Mechanik.* Berlin, Göttingen, Heidelberg : Springer -Verlag, 1964
- [127] THELANDERSSON, S. ; MORÉN, T.: Tensile Stresses and Cracking in Drying Timber. Lund Institute of Technology. 1992. – TVBK-92/3029
- [128] TIMOSHENKO, S. ; GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity.* New York Toronto London : Mc.Graw-Hill Book Company, Inc., 1951
- [129] TIMOSHENKO, S. P.: *Theory of Plates and Shells.* New York : McGraw-Hill, 1940
- [130] TODHUNTER, I. ; PEARSON, K.: *History of the Theory of Elasticity.* Cambridge University Press, 1886-93
- [131] TRENDELENBURG, R. ; MAYER-WEGELIN, H.: *Das Holz als Rohstoff, 2. Auflage.* München : C. Hanser Verlag, 1955
- [132] TSOUMIS, G.: *Science and technology of wood.* New York : Van Nostrand Reinhold, 1991
- [133] URGELA, S. ; RAJČAN, E.: Resonances of wooden plates recognized by using the electronic holography: The means of determination of relevant material properties. In: *Proceedings of the Symposium "Wood Structure and Properties '94"*. Zvolen (Slovakia), September 1994
- [134] URGELA, S. ; RAJČAN, E. ; PETR, P.: Application of the electroacoustic and optical methods in studying the elastic properties of wood. In: *DAGA-Jahrestagung, Dresden*, 1994

- [135] VENDHAN, C.P. ; R.R.ARCHER: Relief of growth stresses in diametrical planks. In: *Holzforschung* 31 (1977), S. 90–96
- [136] VOGEL, R.: *Modellierung des Wärme- und Stofftransportes und des mechanischen Spannungsfeldes fester Körper am Beispiel der Schnittholztrocknung*, TU Dresden, Dissertation, 1989
- [137] VOIGT, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig : Teubner, 1910
- [138] WAGENFÜHR, R. ; SCHEIBER, Chr.: *Holzatlas*. Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1974
- [139] WARBURTON, G.B.: The vibration of rectangular plates. In: *Proc. Inst. Mech. Eng.* A168 (1954), S. 371–384
- [140] WELLING, J.: *Die Erfassung von Trocknungsspannungen während der Kammertrocknung von Schnittholz*, Universität Hamburg, Dissertation, 1987
- [141] WERNICKE, G. ; OSTEN, W.: *Hologramminterferometrie*. Leipzig : VEB Fachbuchverlag, 1982
- [142] WILSON, B.F. ; ARCHER, R.R.: Tree design: Some biological solutions to mechanical problems. In: *Bioscience* 29 (1977), S. 293–297
- [143] WOLFRAM, S.: *Das Mathematica-Buch. Mathematica Version 3. Die offizielle Dokumentation*. Addison Wesley Longman /VVA, 1996
- [144] WOMMELSDORF, O.: *Dehnungs- und Querdehnungszahlen von Hölzern*, Hannover, Dissertation, 1966
- [145] YLINEN, A.: Ein neues Meßverfahren für die Bestimmung der Schubmoduln von Holz. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 5 (1942), S. 375–376
- [146] YLINEN, A.: *Über den Einfluß des Spätholzanteils und der Rohwichte auf die Elastizitätsmoduln, die Poissonschen Konstanten und die Schubmoduln bei Holz mit ausgeprägtem Jahrringbau*. Helsinki, 1956
- [147] ZIENKIEWICZ, O.: *Die Methode der finiten Elemente*. München : Carl Hanser Verlag, 1983

Anhang

Abb. A.1 Mathematica Beispiel-Notebook

Abb. A.2 Elastizitätszahlen unterschiedlicher Hölzer

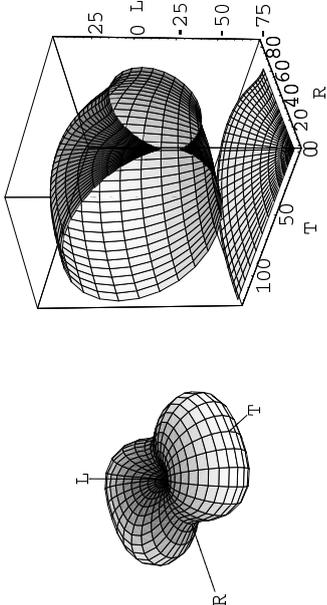
Tab. 17 Struktur des Programmablaufes zur Trocknungssimulation

Mathematica.Beispiel.Notebook.nb

2

■ 3D-Plot

```
In[13]:= Cmax = 1.02 Max[Comp[Pi/2, Pi/2], Comp[Pi/4, Pi/2]];
Achsen = Graphics3D[
  {Line[{{0, 0, 0}, 1.3 {-Cmax, 0, 0}], Text[R, 1.4 {-Cmax, 0, 0}],
  Line[{{0, 0, 0}, 1.3 {0, -Cmax, 0}], Text[T, 1.4 {0, -Cmax, 0}],
  Line[{{0, 0, 0}, 1.1 {0, 0, Cmax}]}, Text[L, 1.2 {0, 0, Cmax}]];
In[14]:= Par1 = ParametricPlot3D[{Comp[x, y] Sin[y] Cos[x],
  Comp[x, y] Sin[y] Sin[x], Comp[x, y] Cos[x],
  GrayLevel[Comp[x, y] / Cmax]}, {x, 0, 2 Pi}, {y, 0, Pi},
  Axes -> False, Ticks -> None, Boxed -> False, AxesLabel -> None,
  PlotPoints -> {33, 33}, ViewPoint -> {-5, -9, 8},
  DisplayFunction -> Identity, PlotRange -> All,
  Shading -> True, Lighting -> False, RenderAll -> False];
Par1 = Show[{Par1, Achsen}];
In[15]:= Par2 = ParametricPlot3D[{{Comp[x, y] Sin[y] Cos[x],
  Comp[x, y] Sin[y] Sin[x], Comp[x, y] Cos[y],
  GrayLevel[Comp[x, y] / Cmax]}, {Comp[x, y] Sin[y] Cos[x],
  Comp[x, y] Sin[x] Sin[y], -Comp[Pi/4, Pi/4] 1.4, GrayLevel[-.9]}],
  {x, 0, Pi/2}, {y, 0, Pi}, Axes -> True, Ticks -> Automatic,
  Boxed -> True, AxesLabel -> {R, T, L}, PlotPoints -> 33,
  ViewPoint -> {-10, -10, 5}, DisplayFunction -> Identity,
  PlotRange -> All, Lighting -> False, RenderAll -> False};
■ Darstellung
In[16]:= Show[GraphicsArray[{Par1, Par2}]];
```



Mathematica.Beispiel.Notebook.nb

1

Nachgiebigkeit von Holz in Längsrichtung

■ Initialisierung

```
In[1]:= Off[syntax::new1]; Off[General::spell1]; Off[Unset::norepl];
In[2]:= S11 =.; S22 =.; S33 =.; S44 =.; S55 =.; S66 =.;
S12 =.; S13 =.; S23 =.; alpha =.; beta =.; gamma =.; s =.;
```

■ Zahlenwerte

```
In[3]:= p = ReadList["data/esche.dat", Number];
s = DiagonalMatrix[Take[p, 6]];
In[5]:= s[1, 2] = s[2, 1] = p[[7]];
s[2, 3] = s[3, 2] = p[[9]];
s[3, 1] = s[1, 3] = p[[8]];
In[8]:= MatrixForm[s]
```

$$\text{Out[8]} // \text{MatrixForm} = \begin{pmatrix} 122 & -3.2 & -45 & 0 & 0 & 0 \\ -3.2 & 6.21 & -2.9 & 0 & 0 & 0 \\ -45 & -2.9 & 65.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 73.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 363 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}

```
In[9]:= S11 = s[[1, 1]]; S22 = s[[2, 2]]; S33 = s[[3, 3]];
S12 = s[[1, 2]]; S13 = s[[1, 3]]; S23 = s[[2, 3]];
S44 = s[[4, 4]]; S55 = s[[5, 5]]; S66 = s[[6, 6]];
■ Berechnung
■ Längsdehnung (precompiled)
In[11]:= S[alpha_, beta_] := s22 Cos[beta]^4 +
  Cos[beta]^2 ((2 S23 + S44) Cos[alpha]^2 + (2 S12 + S66) Sin[alpha]^2) Sin[beta]^2 +
  (S11 Sin[alpha]^4 + (2 S13 + S55) Cos[alpha]^2 Sin[alpha]^2 + S33 Cos[alpha]^4) Sin[beta]^4;
In[12]:= Comp[x_, y_] := S[x, y];
```$$

Abb. A.1: Mathematica Beispiel-Notebook

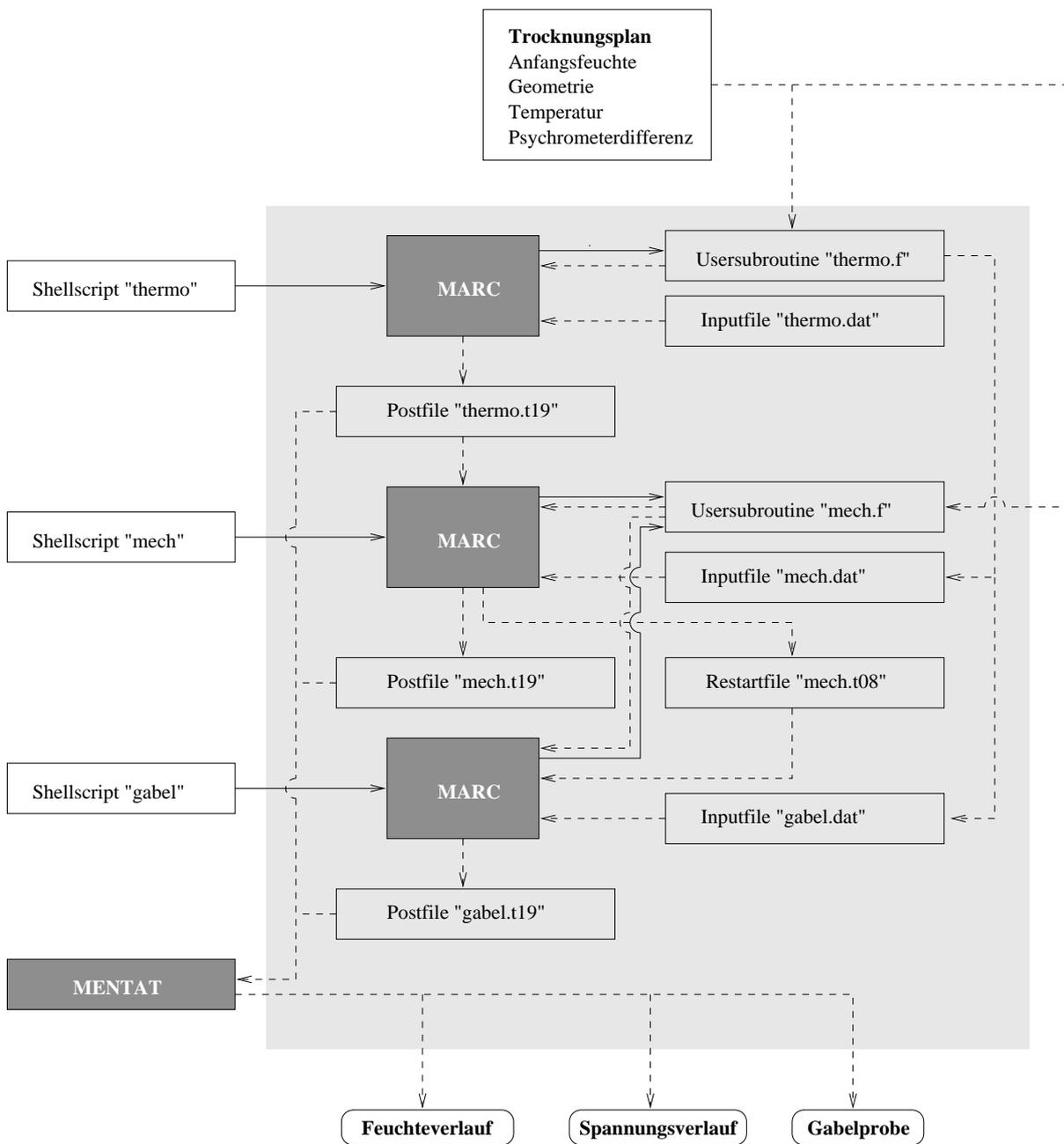


Abb. A.2: Struktur des Programmablaufes zur Trocknungssimulation

| Holzart | Elastizitätszahlen | | | Elastizitätsmoduln | | | | Anisotropie | Dichte |
|----------------------------|---------------------|----------|-----------|--------------------|----------|------------|------------|--|--------|
| | s_{11} | s_{44} | $-s_{23}$ | E_t | G_{tr} | ν_{tr} | ν_{rl} | E_l/E_t | ρ |
| | s_{22} | s_{55} | $-s_{13}$ | E_l | G_{tr} | ν_{tr} | ν_{rt} | E_r/E_t | |
| | s_{33} | s_{66} | $-s_{12}$ | E_r | G_{tl} | ν_{tl} | ν_{lt} | $\frac{s_{11}+s_{33}+s_{55}+2s_{13}}{4s_{22}}$ | |
| | [Pa ⁻¹] | | | [MPa] - | | | | g/cm^3 | |
| Laubhölzer | | | | | | | | | |
| Balsa | 9260 | 3140 | 47.4 | 108 | 318 | .0145 | .304 | 59.4 | 0.20 |
| <i>Ochroma</i> | 156 | 29800 | 2190 | 6410 | 33.6 | .67 | .237 | 2.83 | |
| <i>boliviana</i>
Row. | 3270 | 4830 | 79.8 | 306 | 207 | .512 | .00862 | 60.8 | |
| Eiche | 1015 | 760 | 55 | 985 | 1320 | 0.12 | 0.32 | 5.9 | 0.67 |
| <i>Quercus</i> | 172 | 2500 | 300 | 5810 | 400 | 0.656 | 0.296 | 2.22 | |
| <i>robur</i> L. | 457 | 1280 | 87 | 2190 | 781 | 0.506 | 0.0857 | 4.9 | |
| Mahagoni | 1340 | 1000 | 26.6 | 746 | 1000 | .0331 | .309 | 15.6 | 0.50 |
| <i>Swietenia</i> | 86.1 | 3070 | 463 | 11600 | 326 | .576 | .346 | 1.67 | |
| <i>macrophylla</i>
King | 804 | 1310 | 45.7 | 1240 | 763 | .531 | .0341 | 12.5 | |
| Rotbuche | 862 | 610 | 32 | 1160 | 1640 | .0731 | .448 | 12.1 | 0.72 |
| <i>Fagus</i> | 71.4 | 2150 | 310 | 14000 | 465 | .708 | .36 | 1.97 | |
| <i>sylvatica</i> L. | 438 | 929 | 37 | 2280 | 1080 | .518 | .0429 | 9.91 | |
| Walnuß | 1560 | 1020 | 42.9 | 641 | 980 | .052 | .489 | 17.8 | 0.59 |
| <i>Juglans</i> | 87.6 | 4270 | 585 | 11400 | 234 | .709 | .375 | 1.89 | |
| <i>regia</i> L. | 824 | 1400 | 55.7 | 1210 | 714 | .635 | .0357 | 15.7 | |
| Nadelhölzer | | | | | | | | | |
| Fichte | 2500 | 1590 | 27 | 400 | 628 | .0188 | .438 | 40.6 | 0.44 |
| <i>Picea abies</i> | 61.6 | 27000 | 600 | 16200 | 37 | .419 | .24 | 1.75 | |
| Karst. | 1430 | 1290 | 33 | 699 | 775 | .535 | .0132 | 121 | |
| Kiefer | 1720 | 563 | 28 | 581 | 1780 | .0315 | .465 | 28.6 | 0.54 |
| <i>Pinus</i> | 60.2 | 14800 | 540 | 16600 | 67.6 | .607 | .314 | 1.93 | |
| <i>sylvestris</i> L. | 890 | 1460 | 27 | 1120 | 685 | .449 | .0157 | 67.8 | |
| Sitkafichte | 1960 | 1310 | 31.5 | 510 | 763 | .0289 | .372 | 23.2 | 0.39 |
| <i>Picea</i> | 84.6 | 25200 | 480 | 11800 | 39.7 | .44 | .245 | 1.8 | |
| <i>sitchensis</i>
Carr. | 1090 | 1360 | 39.5 | 917 | 735 | .467 | .0202 | 80.6 | |

Tab. 17: Elastizitätszahlen unterschiedlicher Hölzer